ANNALES

DE

L'INSTITUT HENRI POINCARÉ

RECUEIL DE CONFÉRENCES

ET MÉMOIRES DE CALCUL DES PROBABILITÉS ET PHYSIQUE THÉORIQUE

FASCICULE II — VOLUME I

INSTITUT HENRI POINCARÉ
1, RUE PIERRE-CURIE, 1

LES PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE
ÉDITEURS
49, BOULEVARD SAINT-MICHEL, 49

ANNALES

DE

L'INSTITUT HENRI POINCARÉ

RECUEIL DE CONFÉRENCES

ET MÉMOIRES DE CALCUL DES PROBABILITÉS ET PHYSIQUE THÉORIQUE

FASCICULE II — VOLUME I

INSTITUT HENRI POINCARÉ
1, RUE PIERRE-CURIE, 1

LES PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE
ÉDITEURS
49, BOULEVARD SAINT-MICHEL, 49

La Gravifique Einsteinienne

Six conférences données à l'Institut Henri Poincaré

PAR

TH. DE DONDER

Professeur à l'Université Libre de Bruxelles

Ces pages renferment un exposé succinct des six Conférences que j'ai eu l'honneur de donner à l'Institut Henri Poincaré en novembre et décembre 1929. Elles avaient respectivement pour objet :

I. Le champ gravifique massique.

II. Le champ gravifique électromagnétique.

III. Application à la mécanique ondulatoire.

IV. Electrodynamique des corps en mouvement.

V. Electromagnétostriction et thermodynamique relativistes.

VI. Synthèse.

Je me suis efforcé de montrer que la relativité générale fournit un instrument parfaitement adapté à l'étude de ces problèmes. Contrairement à une opinion assez répandue, la gravifique einsteinienne ne doit pas être modifiée : comprise dans un sens suffisamment large, elle demeure en harmonie avec les théories les plus modernes de la mécanique ondulatoire.

La Gravifique einsteinienne

1. LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DU CHAMP GRAVIFIQUE. — Considérons une fonction $\mathfrak{M}^g$ ne dépendant que des $g^{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta,i}$, ... Sa

variance par rapport à un changement quelconque de variables x_1, x_2, x_3, x_4 est celle d'un multiplicateur ou facteur de densité. Nous appellons $\mathfrak{M}^g$ la *fonction caractéristique gravifique.*

Considérons, en outre, une fonction $\mathfrak{M}$, de même variance, mais qui peut dépendre, indépendamment des $g^{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta,i}$, d'autres fonctions telles u^α, A_α, etc. Cette fonction sera explicitée plus loin ; elle sera désignée sous le nom de *fonction caractéristique phénoménale.*

Le principe *variationnel* fondamental de la gravifique consiste à égaler à zéro, les dix dérivées variationnelles par rapport aux $g^{\alpha\beta}$. On obtient ainsi les *dix équations fondamentales* de la gravifique ; à savoir

$$\frac{\delta(\mathfrak{M}g + \mathfrak{M})}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0. \tag{1}$$

La dérivée variationnelle $\frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}}$ s'écrit :

$$\frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}} \equiv \frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{d}{dx_j}\left(\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta,j}}\right) + \frac{d^2}{dx_j dx_k}\left(\frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta,jk}}\right) - \cdots \tag{2}$$

Posons

$$\mathfrak{T}^g_{\alpha\beta} \equiv \frac{\delta\mathfrak{M}^g}{\delta g^{\alpha\beta}} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{T}_{\alpha\beta} \equiv - \frac{\delta\mathfrak{M}}{\delta g^{\alpha\beta}} \tag{3}$$

d'où

$$\mathfrak{T}^g_{\alpha\beta} = \mathfrak{T}_{\alpha\beta}. \tag{4}$$

Nous appellerons $\mathfrak{T}^g_{\alpha\beta}$ le *tenseur gravifique covariant symétrique*, $\mathfrak{T}_{\alpha\beta}$ le *tenseur phénoménal covariant symétrique* ou simplement *le tenseur symétrique.*

Désignons par C *l'invariant de courbure* et par a et b deux constantes *universelles.* Prenons pour $\mathfrak{M}^g$ la valeur

$$\mathfrak{M}^g = (a + bC)\sqrt{-g}. \tag{5}$$

En effectuant les opérations indiquées en (9 II), on obtient

$$-\frac{1}{2}(a + bC)g_{\alpha\beta} + bC_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} \tag{6}$$

où

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\mathfrak{T}_{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} \tag{7}$$

et $C_{\alpha\beta}$ sont les composantes du tenseur de Riemann bien connu.

Remarque. — Le principe variationnel tel que nous venons de l'exposer revient évidemment à généraliser le *principe de Hamilton*, c'est-à-dire à annuler la variation

$$\delta \int_{\Omega} (\mathfrak{M}^{g} + \mathfrak{M}) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0 \tag{8}$$

Ω étant une portion d'espace-temps sur les frontières de laquelle les variations doivent s'annuler.

2. Les identités gravifiques. — En appliquant à la fonction $\mathfrak{M}^{g}$ les identités de la gravifique [1], on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g^{ij} \frac{\delta \mathfrak{M}^{g}}{\delta g^{\alpha j}} + \frac{1}{2} g^{ij,\alpha} \frac{\delta \mathfrak{M}^{g}}{\delta g^{ij}} \equiv 0. \tag{9}$$

ou encore, en vertu de (3),

$$\frac{\partial \mathfrak{T}^{g\,i}_{\alpha}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} g^{ij,\alpha} \mathfrak{T}^{g}_{ij} = 0 \tag{10}$$

où

$$\mathfrak{T}^{g\,i}_{\alpha} = g^{ij} \mathfrak{T}^{g}_{\alpha j}. \tag{11}$$

3. Théorème de l'impulsion et de l'énergie. — Les dix équations (4) jointes aux quatre identités (10), donnent immédiatement les quatre *équations*

$$\mathfrak{F}_{\alpha} \equiv \mathfrak{T}^{i}_{\alpha;\,i} \equiv \frac{\partial \mathfrak{T}^{i}_{\alpha}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} g^{ij,\alpha} \mathfrak{T}_{ij} = 0 \tag{12}$$

où nous avons posé, comme en (24 II),

$$\mathfrak{T}^{i}_{\alpha} = g^{ij} \mathfrak{T}_{\alpha j}. \tag{13}$$

Nous dirons que les quatre équations (12) expriment le théorème *de l'impulsion et de l'énergie*. On peut aussi exprimer ce théorème en disant que la force généralisée $\mathfrak{F}_{\alpha}$ est nulle.

(1) Th. de Donder. *Théorie invariantive du Calcul des variations.* Bulletin Ac. R. Belg. Cl. des Sciences. 5e série, t. XV, 1929. Voir § 12.

4. ONDES ET RAYONS GRAVIFIQUES. — Choisissons de nouvelles variables x_1, x_2, x_3, x_4 telles que les nouveaux $g_{\alpha\beta}$ satisfassent aux quatre équations *complémentaires* (1)

$$g^{\alpha\beta}\left[{\alpha\beta \atop \sigma}\right] = 0. \tag{14}$$

ou, ce qui revient au même,

$$g^{\alpha\beta}\left\{{\alpha\beta \atop \sigma}\right\} = 0. \tag{15}$$

En utilisant ces nouvelles variables, les équations fondamentales du champ gravifique deviennent

$$g^{\alpha\beta}g_{\sigma\tau,\alpha\beta} = (\sigma, \tau) \tag{16}$$

où les seconds membres (σ, τ) *ne* contiennent *pas* de dérivées secondes des potentiels einsteiniens. Remarquons de plus que chacun des premiers membres de (16) ne contient que des dérivées secondes d'*un seul* potentiel einsteinien.

Nous dirons, d'après HADAMARD et VESSIOT, que les solutions $f = f(x^1, x^2, x^3, x^4)$ de

$$G \equiv g^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f}{\partial x^\beta} = 0 \tag{17}$$

fournissent des *variétés caractéristiques* ou *ondes gravifiques* (élémentaires) :

$$f = 0. \tag{18}$$

Considérons maintenant les caractéristiques (de CAUCHY) de $G = 0$; on aura ainsi les *bicaractéristiques* ou les *rayons gravifiques*. VESSIOT a montré (1) que ce sont des *géodésiques de longueur nulle* du champ gravifique.

5. CHAMP GRAVIFIQUE MASSIQUE. — Dans le cas d'un champ gravifique dû à des masses, nous posons

$$\mathfrak{M} \equiv -g^{\alpha\beta}(\mathfrak{N}u_\alpha u_\beta + \mathfrak{L}_{\alpha\beta}) \tag{19}$$

(1) Th. DE DONDER. *La Gravifique einsteinienne*. Annales de l'Observatoire R. de Belgique, 1921 (ou chez Gauthier-Villars, Paris). Voir § 29.

où $\mathfrak{M}$ est la densité massique généralisée, u_α les composantes covariantes de la vitesse et $\mathfrak{L}_{\alpha\beta}$ les tensions massiques.

En utilisant (3) et (13) on obtient le tenseur

$$\mathfrak{T}_\alpha^\beta = \mathfrak{M} u_\alpha u^\beta + \mathfrak{L}_{|\alpha}^\beta. \tag{20}$$

Le *théorème de l'impulsion et de l'énergie* (12) devient alors

$$\mathfrak{F}_\alpha = \mathfrak{N}_\alpha + \mathfrak{L}_\alpha = 0 \tag{21}$$

où

$$\mathfrak{N}_\alpha \equiv \mathfrak{M} A_\alpha + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\mathfrak{M} u^\beta) \tag{22}$$

et

$$\mathfrak{L}_\alpha \equiv \mathfrak{L}_{\alpha;\beta}^\beta = \frac{\partial \mathfrak{L}_\alpha^\beta}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} g_{\varepsilon\gamma,\alpha} \mathfrak{L}_\beta^\varepsilon. \tag{23}$$

En multipliant (21) par u^α et en sommant on obtient l'*équation de continuité* :

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathfrak{M} u^\alpha) + \mathfrak{L}_\alpha u^\alpha = 0. \tag{24}$$

6. Champ gravifique électromagnétique et massique. — Considérons maintenant le cas où le champ gravifique est dû à des charges électriques et à des masses.

A cet effet, nous introduisons la fonction caractéristique :

$$\mathcal{M} \equiv g^{\alpha\beta} \left[-\mathfrak{M} u_\alpha u_\beta - \mathfrak{L}_{\alpha\beta} + \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{ij} H_{\alpha i} H_{\beta j} \right]. \tag{25}$$

Les fonctions $H_{\alpha i}$ sont les composantes de la force électromagnétique ; elles sont antisymétriques, c'est-à-dire que

$$H_{\alpha i} = - H_{i\alpha}. \tag{26}$$

Grâce à (3) et (13), on aura le tenseur

$$\mathfrak{T}_\alpha^\beta \equiv \mathfrak{M} u_\alpha u^\beta + \mathfrak{L}_\alpha^\beta + \frac{1}{4} \varepsilon_\alpha^\beta \sqrt{-g}\, H_{ij} H^{ij} + \sqrt{-g}\, H_\alpha^i H_i^\beta. \tag{27}$$

Il résulte immédiatement de là, le *théorème de l'impulsion et de l'énergie*

$$\mathfrak{F}_\alpha \equiv \mathfrak{N}_\alpha + \mathfrak{L}_\alpha + \mathfrak{F}_\alpha^{(e)} = 0 \tag{28}$$

où $\mathfrak{M}_\alpha$ et $\mathfrak{L}_\alpha$ ont été définis précédemment (22 et 23) et où

$$(29) \qquad \mathcal{F}_\alpha^{(e)} \equiv \left[\sqrt{-g}\, H^{\overline{\alpha j}} \frac{\partial H_{\overline{ij}}}{\partial x_i} - H_{\alpha j} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, H^{ij})}{\partial x_i} \right].$$

La notation $H_{\overline{ij}}$ signifie qu'il faut affubler H de deux indices formant avec ij une permutation paire $ij\overline{ij}$ des indices 1234. En multipliant (28) par u^α et en sommant par rapport à α, on obtient l'*équation de continuité* (1) :

$$(30) \qquad \frac{\partial(\mathfrak{M}u^\alpha)}{\partial x_\alpha} + \left(\mathfrak{L}_\alpha + \mathcal{F}_\alpha^{(e)}\right)u^\alpha = 0.$$

En multipliant (28) par A^α et en sommant par rapport à α, on obtient la relation (1)

$$(31) \qquad \mathfrak{M} = \frac{-A^\beta\left(\mathcal{F}_\beta^{(e)} + \mathfrak{L}_\beta\right)}{A_\alpha A^\alpha}.$$

7. Équations maxwelliennes. — Introduisons maintenant les équations *électromagnétiques maxwelliennes* :

$$(32) \qquad \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\, H^{\alpha i}\right)}{\partial x_i} = \sigma u^\alpha$$

$$(33) \qquad \frac{\partial \mathcal{H}_*^{\alpha i}}{\partial x_i} = 0$$

où nous avons posé

$$(34) \qquad \mathcal{H}_*^{\alpha i} = H_{\overline{\alpha i}}.$$

De (33) et de (34), il résulte immédiatement que

$$(35) \qquad H_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_\alpha}$$

où Φ est le potentiel électromagnétique.

Il est important de noter que les équations de Maxwell (32) peuvent être tirées d'une fonction fondamentale

$$(36) \qquad \mathfrak{D}^{(e)} = \sigma u^\alpha \Phi_\alpha + \frac{\sqrt{-g}}{4} g^{\alpha\beta} g^{ij} H_{\alpha i} H_{\beta j}$$

(1) Th. de Donder. *Théorie des Champs gravifiques.* Mémorial des Sciences mathématiques. Fasc. XIV. Paris 1926 (Voir chapitres III et VI).

en prenant la dérivée variationnelle par rapport à Φ_α et en supposant que les $H_{\alpha\beta}$ qui y figurent ont la forme (35). Le symbole σ est un facteur de densité électrique.

Il résulte immédiatement de (32) que l'on a

(37) $$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sigma u^\alpha\right) = 0$$

qui exprime la *conservation de la charge électrique en mouvement.*

En tenant compte des équations (32) et (33), dans la valeur (29) de $\mathcal{F}_\alpha^{(e)}$, on trouve

(38) $$\mathcal{F}_\alpha^{(e)} \equiv + \sigma u^i H_{\alpha i}.$$

En multipliant $\mathcal{F}_\alpha^{(e)}$ par u^α et en sommant, on obtient

(39) $$\mathcal{F}_\alpha^{(e)} u^\alpha \equiv 0.$$

Introduisons la valeur de $\mathcal{F}_\alpha^{(e)}$ dans (31) ; nous obtenons ainsi une relation entre les facteurs de densité $\mathfrak{M}$ et σ ; à savoir [1].

(40) $$\mathfrak{M} = \frac{- A^\beta(\sigma u^i H_{\beta i} + \mathfrak{X}_\beta)}{A_\alpha A^\alpha}.$$

On appelle, par définition, *équation complémentaire* de MAXWELL, la relation suivante entre les potentiels électromagnétiques

(41) $$\Psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\,\Phi^\alpha\right) = 0$$

où nous avons écrit $\Phi^\alpha = g^{\alpha\beta}\Phi_\beta$. Les équations électromagnétiques de MAXWELL (32) peuvent alors être simplifiées. Après quelques calculs on obtient

(42) $$\frac{\sigma u^\alpha}{\sqrt{-g}} = K_\alpha + g^{ij}\frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial x_i \partial x_j}$$

où K_α ne contient pas de dérivées secondes de Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4.

8. FORME LAGRANGIENNE ET FORME CANONIQUE DU THÉORÈME DE L'IMPULSION ET DE L'ÉNERGIE. — Considérons le cas d'une masse

(1) *Loc. cit.*, éq. (341).

incohérente, c'est-à-dire où *les* $\mathfrak{L}_{\alpha\beta}$ *sont nuls*. Le théorème de l'implusion et de l'énergie (28), si l'on tient compte de (38), peut s'écrire

$$(43) \quad \mathcal{F}_\alpha = \mathfrak{M}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \frac{1}{2}W^2}{\partial u^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial \frac{1}{2}W^2}{\partial x_\alpha}\right)\right] + \sigma\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial u^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right)\right] = 0$$

où l'on a posé

$$(44) \quad W^2 = g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$$

$$(45) \quad U = u^\alpha \Phi_\alpha.$$

Posons [1]

$$(46) \quad \delta\tau^{(m)} \equiv \mathfrak{M}\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta x_4 ; \qquad \delta\tau^{(e)} \equiv \sigma \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta x_4.$$

Il résulte alors des équations de continuité (30) et (37), en tenant compte de (39) et de ce que $\mathfrak{L}_{\alpha\beta} = 0$, que

$$(47) \quad \frac{d}{ds}\int \delta\tau^{(m)} = 0 ; \qquad \frac{d}{ds}\int \delta\tau^{(e)} = 0.$$

En multipliant les deux derniers membres de (43) par un élément de volume et en intégrant, on obtient

$$(48) \quad \int \delta\tau^{(m)}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \frac{1}{2}W^2}{\partial u^\alpha}\right) - \frac{\partial \frac{1}{2}W^2}{\partial x_\alpha}\right] + \int \delta\tau^{(e)}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial u^\alpha}\right) - \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right] = 0.$$

La mécanique ondulatoire de de Broglie-Schrodinger

9. Mécanique relativiste des charges ponctuelles. — Pour étudier la dynamique des charges ponctuelles dans l'espace-temps, nous introduisons grâce à (46), les deux *constantes* $\tau^{(m)}$ et $\tau^{(e)}$ qui caractérisent la particule au point de vue masse et charge.

Nous écrivons alors l'équation (48) sous la forme

$$(49) \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_\alpha}\right) = 0$$

où nous avons posé

$$(50) \quad L = \frac{1}{2}W^2 + U\varepsilon$$

(1) *Loc. cit.*, équations (188) et (184).

et

(51) $$\varepsilon = \frac{\tau^{(m)}}{\tau^{(e)}}.$$

Introduisons les *variables canoniques*

(52) $$p_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = u_\alpha + \varepsilon\Phi_\alpha$$

et la *fonction hamiltonienne*

(53) $$H = -L + p_\alpha u^\alpha.$$

Il est facile de calculer la valeur de cette fonction, grâce à (52). On trouve

(54) $$H = \frac{1}{2}.$$

Les équations (49) jointes à (52) sont alors équivalentes au système

(55) $$\frac{dx_\alpha}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{ds} = -\frac{\partial H}{dx_\alpha}.$$

La fonction hamiltonienne (53) peut être exprimée en fonction des variables canoniques p_α grâce à (52) ; on obtient

(56) $$H \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(p_\alpha - \varepsilon\Phi_\alpha)(p_\beta - \varepsilon\Phi_\beta).$$

Proposons-nous maintenant de trouver l'équation de JACOBI du système (55) ; posons, à cet effet,

(57) $$p_\alpha \equiv \frac{\partial S}{\partial x_\alpha}.$$

D'où, en vertu de (56), l'*équation jacobienne* :

(58) $$\frac{\partial S}{ds} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial S}{\partial x_\alpha} - \varepsilon\Phi_\alpha\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x_\beta} - \varepsilon\Phi_\beta\right) = 0$$

où S est la fonction de JACOBI. La théorie classique de JACOBI nous apprend d'autre part que

(59) $$\frac{\partial S}{\partial s} = -H = -\frac{1}{2}.$$

En substituant dans (58), on obtient

(60) $$g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial S}{\partial x_\alpha} - \varepsilon\Phi_\alpha\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x_\beta} - \varepsilon\Phi_\beta\right) - 1 = 0.$$

Remarquons enfin que la fonction de Jacobi peut s'écrire, grâce à (59),

(61) $$S = -\frac{1}{2} s + S_0(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

10. Équation relativiste de la mécanique ondulatoire. — Posons

(62) $$kS = \log \Psi$$

où k est une constante universelle dont la valeur sera donnée plus loin. On aura donc

(63) $$\Psi = -\frac{2}{k}\frac{\partial \Psi}{\partial s}$$

et

(64) $$\frac{\partial S}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha}}{\frac{\partial \Psi}{\partial s}}.$$

Reprenons alors l'équation jacobienne (60). Celle-ci peut donc s'écrire

(65) $$J \equiv g^{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha} + \varepsilon\Phi_\alpha\frac{\partial \Psi}{\partial s}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial x_\beta} + \varepsilon\Phi_\beta\frac{\partial \Psi}{\partial s}\right) - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s}\right)^2 = 0.$$

Pour obtenir l'équation relativiste de la mécanique ondulatoire, proposons-nous d'extrémer l'expression (65) ; écrivons donc

(66) $$\frac{\delta(J\sqrt{-g})}{\delta\Psi} = 0$$

où le symbole $\frac{\delta}{\delta\Psi}$ signifie qu'il faut prendre *la dérivée variationnelle* de $J\sqrt{-g}$ par rapport à Ψ, à savoir

(67) $$\frac{\delta}{\delta\Psi} = \frac{\partial}{\partial\Psi} - \sum_{\sigma=0}^{4}\frac{d}{dx_\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial\frac{\partial\Psi}{\partial x_\sigma}}\right). \qquad \begin{cases} x^\sigma = s, x_1, x_2, x_3, x_4 \\ 6 = 0, 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

L'équation (66) explicitée donne l'*équation de* DE BROGLIE-SCHRODINGER *généralisée* (1)

$$\boxed{\Box\Psi - 2k\varepsilon \sum_\alpha \Phi^\alpha \frac{\partial\Psi}{\partial x_\alpha} - k\varepsilon D\Psi + (k\varepsilon)^2 \left(F - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)\Psi = 0} \tag{68}$$

où l'on a posé

$$\Box\Psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\sum_\beta g^{\alpha\beta}\frac{\partial\Psi}{\partial x_\beta}\right) \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4 \tag{69}$$

$$D \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\sum_\beta g^{\alpha\beta}\Phi_\beta\right) \tag{70}$$

$$F \equiv \sum_\alpha \Phi_\alpha \Phi^\alpha. \tag{71}$$

La constante universelle k est donnée par

$$-k = 2i\pi \frac{m_0 c^2}{hc} \tag{72}$$

où m_0 est la masse de l'électron *au repos*. On aura, en vertu de (72),

$$\frac{2i\pi}{-k} = 2{,}42.10^{-2}\text{Å}. \tag{73}$$

Dans le second membre de (73) figure *la longueur d'onde correspondant à la transformation du contenu énergétique m_0c^2 d'un électron en un quantum lumineux.*

Champ de Minkowski. — Supposons que le champ gravifique soit de MINKOWSKI et que les composantes Φ_1. Φ_2, Φ_3 soient *nulles.* Posons, en outre

$$\Phi_4 = cV\,; \qquad \text{d'où} \qquad \Phi^4 = \frac{1}{c}V. \tag{74}$$

Le système considéré étant stationnaire, posons avec O. KLEIN,

$$\Psi \equiv \Theta e^{-\frac{2i\pi}{h}E\cdot t} \tag{75}$$

où Θ ne dépend plus de t et où E est une constante.

(1) Th. DE DONDER. Bull. Ac. Roy. Belgique. Cl. des Sc. 5e série, t. XIII. Séance du 5 février 1927.

Substituons dans l'équation (68) ; d'où, en vertu de (74),

(76) $$\triangle\Psi + \frac{4\pi^2}{c^2h^2}[(\mathcal{E} - e_0V)^2 + 2(\mathcal{E} - e_0V)m_0c^2]\Psi = 0$$

où l'on a posé

(77) $$\mathcal{E} = E - m_0c^2$$

Approximativement, l'équation précédente pourra s'écrire

(78) $$\triangle\Psi + \frac{8\pi^2}{c^2h^2} m_0c^2(\mathcal{E} - e_0V)\Psi = 0$$

où

(79) $$\triangle\Psi = \sum_i \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i^2}.$$

Cette dernière équation est l'*équation ordinaire de* DE BROGLIE-SCHRODINGER.

Electrodynamique des corps en mouvement

11. ÉQUATIONS GRAVIFIQUES. — Nous avons vu que les 10 équations fondamentales du champ gravifique pouvaient se déduire du principe variationnel (1). Nous poserons ici pour la fonction $\mathfrak{M}$:

(80) $$\boxed{\mathfrak{M} = -\mathfrak{N}W^2 + \underset{*}{\mathfrak{M}}^{(m)} + \underset{*}{\mathfrak{M}}^{(m,e)} + \mathfrak{M}^{(e)}}$$

où $\mathfrak{N}$ est le facteur tensoriel massique, où

(81) $$W^2 \equiv g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 1$$

et où $\underset{*}{\mathfrak{M}}^{(m)}$, $\underset{*}{\mathfrak{M}}^{(m,e)}$, $\underset{*}{\mathfrak{M}}^{(e)}$ représentent respectivement les fonctions caractéristiques des phénomènes *massiques*, *massiques-électromagnétiques* et *purement électromagnétiques*. Nous dirons aussi que $\underset{*}{\mathfrak{M}}^{(m,e)}$ caractérise les phénomènes d'électromagnétostriction ou plus simplement la *striction*.

12. ÉQUATIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES. — Nous écrivons les équations du champ maxwellien généralisées sous la forme

(82) $$\frac{d\mathcal{H}^{\alpha\beta}}{dx_\beta} = \mathcal{C}^\alpha$$

(83) $$\frac{d\underset{*}{\mathcal{H}}^{\alpha\beta}}{dx_\alpha} = \underset{*}{\mathcal{C}}^\alpha$$

où

$$\mathcal{C}^{\alpha} \equiv \sigma_{(e)} u^{\alpha} + \mathfrak{L}^{\alpha}_{(e)} \tag{84}$$

$$\mathcal{C}^{\alpha}_{*} \equiv \sigma_{(\mu)} u^{\alpha} + \mathfrak{L}^{\alpha}_{(\mu)} \tag{85}$$

où l'indice (e) signifie *électrique*, et l'indice (μ), *magnétique*. Les expressions σu^{α} et $\mathfrak{L}^{\alpha}$ représentent respectivement les composantes des courants de convection et de conduction généralisés.

Dans le cas le plus général, nous définissons la *force électromagnétique* par le tenseur antisymétrique

$$\mathcal{K}^{\alpha\beta} \equiv \mathcal{H}^{\alpha\beta} - \mathfrak{P}^{\alpha\beta}_{(e)} \tag{86}$$

et la *force électromagnétique adjointe* par le tenseur antisymétrique

$$\mathcal{K}^{\alpha\beta}_{*} = \mathcal{H}^{\alpha\beta}_{*} - \mathfrak{P}^{\alpha\beta}_{(\mu)} \tag{87}$$

où

$$\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{*} = \mathrm{H}_{\overline{\alpha\beta}} \tag{88}$$

Ecrivons maintenant avec Einstein, la *force de polarisation* définie par les six composantes $\mathfrak{P}^{\alpha\beta}_{(e)}$ sous la forme

$$\mathfrak{P}^{\alpha\beta}_{(e)} \equiv \mathfrak{P}^{\alpha}_{(e)} u^{\beta} - \mathfrak{P}^{\beta}_{(e)} u^{\alpha} \tag{89}$$

où $\mathfrak{P}^{\alpha}_{(e)}$ sont les quatre composantes contravariantes tensorielles de l'*intensité de polarisation électrique*. Rappelons que $u^{\alpha} = \dfrac{dx_{\alpha}}{ds}$.

Exprimons de même la *force de polarisation magnétique* au moyen de l'*intensité de polarisation magnétique* par

$$\mathfrak{P}^{\alpha\beta}_{(\mu)} \equiv \mathfrak{P}^{\alpha}_{(\mu)} u^{\beta} - \mathfrak{P}^{\beta}_{(\mu)} u^{\alpha}. \tag{90}$$

De (82) et (83) on tire immédiatement

$$\frac{d\mathcal{C}^{\alpha}}{dx_{\alpha}} = 0\,; \qquad \frac{d\mathcal{C}^{\alpha}_{*}}{dx_{\alpha}} = 0. \tag{91}$$

Afin de pouvoir donner facilement l'interprétation physique des termes ci-dessus, supposons que x_1, x_2, x_3 représentent des coordonnées rectangulaires dextrogyres, et que x_4 représente le temps t. Au lieu

de x_1, x_2, x_3, nous emploierons aussi la notation x, y, z. Il est alors commode d'employer les notations habituelles de l'électromagnétisme, en posant :

$$(92) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{X}^{23} = c\mathcal{H}_x \\ \mathfrak{X}^{31} = c\mathcal{H}_y \\ \mathfrak{X}^{12} = c\mathcal{H}_z \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{X}_*^{23} = c\mathrm{H}_x^* \\ \mathfrak{X}_*^{31} = c\mathrm{H}_y^* \\ \mathfrak{X}_*^{12} = c\mathrm{H}_z^* \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{X}^{14} = -\mathrm{B}_x \\ \mathfrak{X}^{24} = -\mathrm{B}_y \\ \mathfrak{X}^{34} = -\mathrm{B}_z \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{X}_*^{14} = \mathfrak{B}_x \\ \mathfrak{X}_*^{24} = \mathfrak{B}_y \\ \mathfrak{X}_*^{34} = \mathfrak{B}_z. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dans ces tableaux, les symboles ont la signification physique suivante :

$(\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{H}_z)$ = composantes de la force magnétique
$(\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z)$ = composantes de l'induction magnétique.

D'autre part, on a posé

$$(93) \quad \mathrm{H}_x^* \equiv \mathrm{H}_x - \mathrm{H}_x^a ; \qquad \mathrm{H}_y^* \equiv \mathrm{H}_y - \mathrm{H}_y^a ; \qquad \mathrm{H}_z^* \equiv \mathrm{H}_z - \mathrm{H}_z^a .$$

où

$(\mathrm{H}_x, \mathrm{H}_y, \mathrm{H}_z)$ = composantes de la force électrique
$(\mathrm{H}_x^a, \mathrm{H}_y^a, \mathrm{H}_z^a)$ = composantes de la force électrique appliquée (eingeprägt).

Enfin

$(\mathrm{B}_x, \mathrm{B}_y, \mathrm{B}_z)$ = composantes de l'induction électrique.

Il est presque inutile d'ajouter que toutes ces expressions doivent être entendues dans un sens *généralisé*.

Grâce aux notations (92), les équations électromagnétiques (S2) et (S3) des corps en mouvement, conservent la forme maxwellienne :

$$(94) \quad \operatorname{div} \mathrm{B} = \sigma_{(e)} u^4 + \mathfrak{S}_{(e)}^4 \qquad \operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t} + \sigma_{(e)} u + \mathfrak{S}_{(e)} \right)$$

$$(95) \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = \sigma_{(m)} u^4 + \mathfrak{S}_{(m)}^4 \qquad \operatorname{rot} \mathrm{H}^* = \frac{1}{c} \left(-\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \sigma_{(m)} u + \mathfrak{S}_{(m)} \right).$$

Les composantes rectangulaires du vecteur $\sigma_{(e)} u + \mathfrak{S}_{(e)}$ sont

$\tau_{(i)}u + \mathfrak{L}_{(i)}$ (i = 1, 2, 3). Il en sera de même pour le vecteur $\tau_{(4)}u + \mathfrak{L}_{(4)}$.

13. Retour aux équations gravifiques. — Prenons la dérivée variationnelle de la fonction (80) par rapport à $g_{\alpha\beta}$ et posons

$$(96) \qquad \mathfrak{T}^{(m)}_{\alpha\beta} \equiv -\frac{\partial \mathfrak{M}^{(m)}_*}{\partial g^{\alpha\beta}}, \qquad \mathfrak{T}^{(m,e)}_{\alpha\beta} \equiv -\frac{\partial \mathfrak{M}^{(m,e)}_*}{\partial g^{\alpha\beta}}, \qquad \mathfrak{T}^{(e)}_{\alpha\beta} \equiv -\frac{\partial \mathfrak{M}^{(e)}_*}{\partial g^{\alpha\beta}}.$$

Nous aurons donc

$$(97) \qquad \mathfrak{T}_{\alpha\beta} = \mathfrak{N}u_\alpha u_\beta + \mathfrak{T}^{(m)}_{\alpha\beta} + \mathfrak{T}^{(m,e)}_{\alpha\beta} + \mathfrak{T}^{(e)}_{\alpha\beta}.$$

Dans le cas d'un champ électromagnétique quelconque, nous posons (1)

$$(98) \qquad \boxed{\mathfrak{M}^{(e)}_* = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} g^{\epsilon\nu} K_{\alpha\epsilon} \mathcal{K}^{\overline{\beta\nu}}_*.}$$

Il en résulte que

$$(99) \qquad \mathfrak{T}^{(e)}_{\alpha\beta} \equiv -\frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\epsilon\nu}\left(K_{\alpha\epsilon}\mathcal{K}^{\overline{\beta\nu}}_* - K_{\beta\epsilon}\mathcal{K}^{\overline{\alpha\nu}}_*\right) - \frac{\sqrt{-g}}{4} g_{\alpha\beta} g^{kl} g^{\epsilon\nu} K_{k\epsilon}\mathcal{K}^{\overline{l\nu}}_*.$$

Posons ensuite

$$(100) \qquad P_{\alpha\beta} = T^{(m)}_{\alpha\beta} + T^{(m,e)}_{\alpha\beta};$$

d'où

$$(101) \qquad T_{\alpha\beta} = N u_\alpha u_\beta + P_{\alpha\beta} + T^{(e)}_{\alpha\beta}.$$

Il est facile de déduire de (99), (100) et (101) la valeur des composantes mixtes $\mathfrak{T}^{\beta(e)}_{\alpha}$, P^{β}_{α}, T^{β}_{α}. Le *théorème de l'impulsion et de l'énergie* (12) devient ici

$$(102) \qquad \mathfrak{F}_\alpha \equiv \mathfrak{T}^{\beta}_{\alpha;\beta} \equiv \mathfrak{N}_\alpha + \mathfrak{L}_\alpha + \mathfrak{F}^{(e)}_\alpha$$

où $\mathfrak{N}_\alpha$ et $\mathfrak{L}_\alpha$ ont été définis respectivement en (22) et (23) en tenant compte de (100). On a, en outre,

$$(103) \qquad \mathfrak{F}^{(e)}_\alpha \equiv \mathfrak{T}^{\beta(e)}_{\alpha;\beta} \equiv -\frac{1}{2}\frac{d}{dx_\beta}\left[\sqrt{-g}\, g^{\beta\nu} g^{\epsilon\lambda}\left(K_{\alpha\epsilon}\mathcal{K}^{\overline{\lambda\nu}}_* - K_{\lambda\epsilon}\mathcal{K}^{\overline{\alpha\nu}}_*\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\sqrt{-g}\, g^{kl} g^{\epsilon\nu} \frac{d}{dx_\alpha}\left(K_{k\epsilon}\mathcal{K}^{\overline{l\nu}}_*\right)\right].$$

(1) Th. De Donder. *The mathematical Theory of Relativity* (Massachusetts Institute of Technology. Cambridge. Mass. U. S. A., 1927). Voir page 77.

14. Hystérèse électromagnétique. — Par définition, l'*hystérèse électromagnétique* est un quadri-vecteur $\mathcal{H}_\alpha^{(e)}$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) donné par (1)

$$\boxed{\mathcal{H}_\alpha^{(e)} \equiv \mathcal{L}_\alpha - \mathcal{F}_\alpha^{(e)}} \tag{104}$$

où l'on a posé

$$\mathcal{L}_\alpha \equiv \mathcal{K}_*^{\overline{\alpha\beta}} \frac{d\mathcal{K}^{\beta\gamma}}{dx_\gamma} - \mathcal{K}^{\overline{\alpha\beta}} \frac{d\mathcal{K}_*^{\beta\gamma}}{dx_\gamma}. \tag{105}$$

ou, en vertu de (82) et (83),

$$\boxed{\mathcal{L}_\alpha \equiv \mathcal{K}_*^{\overline{\alpha\beta}} \mathcal{C}^\beta - \mathcal{K}^{\overline{\alpha\beta}} \mathcal{C}_*^\beta}. \tag{106}$$

On voit que l'expression (105) est identique à (29) dans les systèmes dépourvus de polarisations électrique et magnétique de sorte que dans ce cas $\mathcal{H}_\alpha^{(e)} \equiv 0$. Il en résulte que l'*hystérèse,* telle que nous l'avons définie, *est essentiellement due à ces polarisations.*

En introduisant les notations (92) dans (106), il est facile de voir que les trois premières composantes de (106) peuvent se mettre sous forme vectorielle ; à savoir

$$\left.\begin{matrix}\mathcal{L}_1\\ \mathcal{L}_2\\ \mathcal{L}_3\end{matrix}\right\} \mathcal{L} = [\mathcal{C}\cdot\mathrm{B}] + c\mathrm{H}^*\mathcal{C}^4 + [\mathcal{C}_*\cdot\mathrm{B}] + c\mathcal{H}\mathcal{C}_*^4. \tag{107}$$

Cette expression généralise l'expression classique de la *force de* Lorentz (multipliée par c).

La quatrième composante peut s'écrire

$$\mathcal{L}_4 = -c(\mathrm{H}^*\cdot\mathcal{C}) + c(\mathcal{H}\cdot\mathcal{C}_*) \tag{108}$$

ce qui est l'expression générale de l'*effet* Joule.

15. Équation de continuité. — Cette équation s'obtient en multipliant les composantes $\mathcal{F}_\alpha^{(e)}$ par u^α et en sommant. On trouve

$$\frac{d(\mathfrak{N}u^\alpha)}{dx_\alpha} + \left(\mathcal{L}_\alpha + \mathcal{F}_\alpha^{(e)}\right)u^\alpha = 0 \tag{109}$$

(1) Th. de Donder. C. R. Ac. des Sc. de Paris, 2 juillet 1928.

ou encore

$$\text{(110)} \qquad \frac{d}{ds}\left[\mathcal{M}\delta(x^1\cdots x^4)\right] = -\left(\mathfrak{L}_\alpha + \mathcal{F}_\alpha^{(e)}\right)u^\alpha\delta(x^1\cdots x^4).$$

Il est facile de transformer (109) et de le mettre sous la forme :

$$\text{(111)} \qquad \frac{d\left(\mathcal{M}u^\alpha\right)}{dx^\alpha} + \left(\mathcal{T}_{\alpha;\beta}^{\beta(m)} + \mathcal{T}_{\alpha;\beta}^{\beta(m,e)} + \mathcal{T}_{\alpha;\beta}^{\beta(e)}\right)u^\alpha = 0.$$

Les expressions entre parenthèses peuvent s'intégrer par parties ; on aura par exemple

$$\text{(112)} \qquad \mathcal{T}_{\alpha;\beta}^{\beta(m,e)}u^\alpha = \frac{d\left(\mathcal{T}_\alpha^{\beta(m,e)}u^\alpha\right)}{dx_\beta} + \mathcal{K}^{(m,e)}$$

où l'on a posé

$$\text{(113)} \quad \mathcal{K}^{(m,e)} \equiv -\frac{1}{4}\left(\mathcal{T}_\alpha^{\beta(m,e)} + \mathcal{T}_\beta^{\alpha(m,e)}\right)\left(\frac{du^\alpha}{dx_\beta} + \frac{du^\beta}{dx_\alpha}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left(\mathcal{T}_\alpha^{\beta(m,e)} - \mathcal{T}_\beta^{\alpha(m,e)}\right)\left(\frac{du^\alpha}{dx_\beta} - \frac{du^\beta}{dx_\alpha}\right) - \frac{1}{2}\frac{dg_{\alpha\beta}}{ds}\mathcal{T}_{(m,e)}^{\alpha\beta}.$$

On aura des expressions analogues pour $\mathcal{K}^{(m)}$ et $\mathcal{K}^{(e)}$.

Grâce aux formules précédentes, l'équation de continuité peut donc enfin s'écrire

$$\text{(114)} \qquad \frac{d\left[\left(\mathcal{M} + \mathcal{T}_\beta^{\alpha(m)} + \mathcal{T}_\beta^{\alpha(m,e)} + \mathcal{T}_\beta^{\alpha(e)}\right)u^\beta\right]}{dx^\alpha} + \mathcal{K} = 0$$

où

$$\text{(115)} \qquad \mathcal{K} \equiv \mathcal{K}^{(m)} + \mathcal{K}^{(m,e)} + \mathcal{K}^{(e)}.$$

16. Principe fondamental de l'électromagnétostriction. — Nous dirons que $\mathcal{K}^{(m,e)}$ défini par (113) est la *puissance* (par unité de volume) *de la striction*. En généralisant une hypothèse de la théorie classique de l'électromagnétostriction, nous admettrons (1) qu'on a

$$\text{(116)} \qquad \boxed{\mathcal{K}^{(m,e)} = \mathcal{H}_\alpha^{(e)}u^\alpha}$$

Autrement dit : *la puissance de striction est égale à la puissance d'hystérèse.*

(1) *Loc. cit.*, ci-dessus.

Le principe (116) peut encore s'écrire

$$(117)\qquad \mathcal{K}^{(m,e)} = \left(\mathcal{H}_i^{(e)} v^i + \mathcal{H}_4^{(e)}\right) u^4, \qquad v^i \equiv \frac{dx_i}{dt}\ (i = 1, 2, 3).$$

En assimilant u^4 à $\frac{1}{c}$, on aura, en première approximation,

$$(118)\qquad \mathrm{K}^{(m,e)} = \frac{1}{c}\left(\mathrm{H}_i^{(e)} v^i + \mathrm{H}_4^{(e)}\right).$$

D'autre part, grâce aux notations (92), on peut écrire $\mathrm{H}_4^{(e)}$, défini par (104), sous la forme :

$$(119)\quad \mathrm{H}_4^{(e)} \equiv \frac{1}{2}\left[\left(\mathrm{H}^* \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t}\right) - \left(\mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial t}\right) + \left(\mathcal{H}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}\right) - \left(\mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right)\right] + \frac{c}{2}\,\mathrm{div.}\,([\mathrm{H}^*\cdot\mathcal{H}] - [\mathrm{B}\cdot\mathcal{B}]).$$

Dans le cas de déformations oscillantes du corps considéré, nous admettrons qu'on ait le *bilan* :

$$(120)\qquad \mathrm{H}_i^{(e)} v^i + \frac{c}{2}\,\mathrm{div.}\,([\mathrm{H}^*\cdot\mathcal{H}] - [\mathrm{B}\cdot\mathcal{B}]) = 0.$$

Nous pourrons alors écrire finalement le principe fondamental (116) sous la forme :

$$(121)\quad \mathrm{K}^{(m,e)} = \frac{1}{2c}\left[\left(\mathrm{H}^*\cdot\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t}\right) - \left(\mathrm{B}\cdot\frac{\partial \mathrm{H}^*}{\partial t}\right) + \left(\mathcal{H}\cdot\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}\right) - \left(\mathcal{B}\cdot\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right)\right].$$

17. Calcul de $\mathrm{K}^{(m,e)}$ en fonction des déformations. — Posons

$$(122)\qquad x_i = x_i^0 + \lambda_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) \qquad i = 1, 2, 3$$

où λ_i représente le déplacement infiniment petit à partir du point initial x_i^0 ($i = 1, 2, 3$) ; pour $t = 0$, on a $x_i = x_i^0$. Le corps considéré *dans son ensemble* est donc *au repos* par rapport au trièdre (x_1, x_2, x_3).

Il en résulte que

$$(123)\qquad v^i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial t}.$$

Posons

$$\frac{d\lambda_i}{dt} \equiv \dot{\lambda}_i\ ; \qquad \text{d'où} \qquad v^i \equiv \dot{\lambda}_i \qquad i = 1, 2, 3.$$

Adoptons aussi les notations classiques

$$(124)\quad \begin{cases} x_x = \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x^0}; \quad y_y = \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y_0}; \quad z_z = \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial z^0}; \\ x_y = y_x = \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial y^0} + \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial x^0}; \quad x_z = z_x = \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial z^0} + \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial x^0}; \quad y_z = z_y = \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial z^0} + \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial y^0} \\ x_t = \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial t}; \quad y_t = \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial t}; \quad z_t = \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial t} \end{cases}$$

et

$$(125)\quad \omega^1 = \omega_x = \frac{\partial\lambda_3}{\partial y} - \frac{\partial\lambda_2}{\partial z}; \quad \omega^2 = \omega_y = \frac{\partial\lambda_1}{\partial z} - \frac{\partial\lambda_2}{\partial x}; \quad \omega^3 = \omega_z = \frac{\partial\lambda_2}{\partial x} - \frac{\partial\lambda_1}{\partial y}.$$

Il est bon de se rappeler qu'à un infiniment petit près, on peut identifier x_i^0 avec x_i ($i = 1, 2, 3$) ; nous pouvons donc, dans (80), remplacer les x_i^0 par les x_i. Il en résulte que les expressions qui figurent dans (113) deviennent

$$(126)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v^1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial\dot{\lambda}_1}{\partial x} = \dot{x}_x; \quad \dfrac{\partial v^2}{\partial x_2} = \dot{y}_y; \quad \dfrac{\partial v^3}{\partial x_3} = \dot{z}_z \\ \dfrac{\partial v^1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v^2}{\partial x_1} = \dot{x}_y; \quad \dfrac{\partial v^1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v^3}{\partial x_1} = \dot{x}_z; \quad \dfrac{\partial v^2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v^3}{\partial x_2} = \dot{y}_z \end{cases}$$

et

$$(127)\quad \dot{\omega}_x = \frac{\partial v^3}{\partial y} - \frac{\partial v^2}{\partial z}; \quad \dot{\omega}_y = \frac{\partial v^1}{\partial z} - \frac{\partial v^3}{\partial x}; \quad \dot{\omega}_z = \frac{\partial v^2}{\partial x} - \frac{\partial v^1}{\partial y}$$

le point au-dessus des x_x, y_y, ... indiquant une dérivée partielle par rapport à t.

La *puissance de striction* $K^{(m,e)}$ peut donc s'écrire (113), dans cette même approximation $\left(u^4 \backsim \frac{1}{c}\right)$

$$(128)\quad K^{(m,e)} \equiv -\frac{1}{c}\left[\begin{array}{l} T_1^{1(m,e)}\dot{x}_x + T_2^{2(m,e)}\dot{y}_y + T_3^{3(m,e)}\dot{z}_z \\ +\frac{1}{2}(T_1^{2(m,e)}+T_2^{1(m,e)})\dot{x}_y + \frac{1}{2}(T_2^{3(m,e)}+T_3^{2(m,e)})\dot{y}_z + \frac{1}{2}(T_3^{1(m,e)}+T_1^{3(m,e)})\dot{z}_x \\ -\frac{1}{2}(T_1^{2(m,e)}-T_2^{1(m,e)})\dot{\omega}_z - \frac{1}{2}(T_2^{3(m,e)}-T_3^{2(m,e)})\dot{\omega}_x - \frac{1}{2}(T_3^{1(m,e)}-T_1^{3(m,e)})\dot{\omega}_y \\ + T_1^{4(m,e)}\dot{x}_t + T_2^{4(m,e)}\dot{y}_t + T_3^{4(m,e)}\dot{z}_t. \end{array}\right]$$

18. Calcul du second membre de (121). — Retournons au second membre de (121) et admettons qu'on ait

$$(129)\quad H_i = \sum_j \varepsilon'_{ij} B_j; \quad \mathcal{H}_i = \sum_j \mu'_{ij} \mathcal{B}_j.$$

Posons

$$W = T_4^{4(e)}. \tag{130}$$

Donc W représente la densité de l'énergie électromagnétique localisée dans le volume v

$$\int_v W\delta v \equiv \frac{1}{2}\int_v [(H\cdot B) + (\mathcal{H}\cdot\mathcal{B})]\delta v \tag{131}$$
$$= \frac{1}{2}\int_v \sum_i \sum_j \varepsilon'_{ij}B_iB_j + \mu'_{ij}\mathcal{B}_i\mathcal{B}_j)\delta v.$$

Le second membre de (121) pourra donc s'écrire

$$-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{B\mathcal{B}}\delta v \tag{132}$$

où les indices B,$\mathcal{B}$ servent à rappeler que la dérivée partielle par rapport à t se fait en laissant les B_i et les $\mathcal{B}_i$ ($i = 1, 2, 3$) constants ; on aura donc

$$-\frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{B\mathcal{B}}\delta v = -\frac{1}{2c}\int_v \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial \varepsilon'_{ij}}{\partial t}B_iB_j + \frac{\partial \mu'_{ij}}{\partial t}\mathcal{B}_i\mathcal{B}_j\right)\delta v. \tag{133}$$

Supposons que les coefficients ε'_{ij} et μ'_{ij} soient des fonctions *des déformations linéaires et angulaires* $x_x \cdots z_z$, des *rotations* ω^i et des vitesses v^i. Autrement dit, la densité W de l'énergie électromagnétique dépend explicitement de

$$\left\{\begin{matrix} x_x, & y_y, & z_z & \quad x_y, & y_z, & z_x \\ \omega_x, & \omega_y, & \omega_z & \quad x_t, & y_t, & z_t. \end{matrix}\right. \tag{134}$$

Le second membre de (121) pourra donc s'écrire

$$-\frac{1}{c}\int_v\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{B,\mathcal{B}}\delta v \equiv \int_v \left[\begin{matrix} \left(\frac{\partial W}{\partial x_x}\right)_{B,\mathcal{B}}\dot{x}_x + \left(\frac{\partial W}{\partial y_y}\right)_{B,\mathcal{B}}\dot{y}_y + \left(\frac{\partial W}{\partial z_z}\right)_{B,\mathcal{B}}\dot{z}_z \\ + \left(\frac{\partial W}{\partial x_y}\right)_{B,\mathcal{B}}\dot{x}_y + \left(\frac{\partial W}{\partial y_z}\right)_{B,\mathcal{B}}\dot{y}_z + \left(\frac{\partial W}{\partial z_x}\right)_{B,\mathcal{B}}\dot{z}_x \\ + \left(\frac{\partial W}{\partial \omega_x}\right)_{B,\mathcal{B}}\dot{\omega}_x + \left(\frac{\partial W}{\partial \omega_y}\right)_{B,\mathcal{B}}\dot{\omega}_y + \left(\frac{\partial W}{\partial \omega_z}\right)_{B,\mathcal{B}}\dot{\omega}_z \\ + \left(\frac{\partial W}{\partial x_t}\right)_{B,\mathcal{B}}\dot{x}_t + \left(\frac{\partial W}{\partial y_t}\right)_{B,\mathcal{B}}\dot{y}_t + \left(\frac{\partial W}{\partial z_t}\right)_{B,\mathcal{B}}\dot{z}_t \end{matrix}\right]\delta v. \tag{135}$$

19. Tenseur de l'électrostriction.

$$(136)\quad \begin{cases} T_1^{1(m,\mathcal{E})} = \left(\dfrac{\partial W}{\partial x_x}\right)_{B,\mathcal{B}} \\ T_2^{2(m,\mathcal{E})} = \left(\dfrac{\partial W}{\partial y_y}\right)_{B,\mathcal{B}} \\ T_3^{3(m,\mathcal{E})} = \left(\dfrac{\partial W}{\partial z_z}\right)_{B,\mathcal{B}} \end{cases}$$

$$(137)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(T_1^{2(m,\mathcal{E})} + T_2^{1(m,\mathcal{E})}\right) = \left(\dfrac{\partial W}{\partial x_y}\right)_{B,\mathcal{B}} \\ \dfrac{1}{2}\left(T_2^{3(m,\mathcal{E})} + T_3^{2(m,\mathcal{E})}\right) = \left(\dfrac{\partial W}{\partial y_z}\right)_{B,\mathcal{B}} \\ \dfrac{1}{2}\left(T_3^{1(m,\mathcal{E})} + T_1^{3(m,\mathcal{E})}\right) = \left(\dfrac{\partial W}{\partial z_x}\right)_{B,\mathcal{B}} \end{cases}$$

$$(138)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(T_1^{2(m,\mathcal{E})} - T_2^{1(m,\mathcal{E})}\right) = -\left(\dfrac{\partial W}{\partial \omega_z}\right)_{B,\mathcal{B}} \\ \dfrac{1}{2}\left(T_2^{3(m,\mathcal{E})} - T_3^{2(m,\mathcal{E})}\right) = -\left(\dfrac{\partial W}{\partial \omega_x}\right)_{B,\mathcal{B}} \\ \dfrac{1}{2}\left(T_3^{1(m,\mathcal{E})} - T_1^{3(m,\mathcal{E})}\right) = -\left(\dfrac{\partial W}{\partial \omega_y}\right)_{B,\mathcal{B}} \end{cases}$$

$$(139)\quad \begin{cases} T_1^{4(m,\mathcal{E})} = \left(\dfrac{\partial W}{\partial x_t}\right)_{B,\mathcal{B}} \\ T_2^{4(m,\mathcal{E})} = \left(\dfrac{\partial W}{\partial y_t}\right)_{B,\mathcal{B}} \\ T_3^{4(m,\mathcal{E})} = \left(\dfrac{\partial W}{\partial z_t}\right)_{B,\mathcal{B}}. \end{cases}$$

Dans ces tableaux, ne figurent pas encore

$$(140)\qquad T_4^{1(m,\mathcal{E})},\quad T_4^{2(m,\mathcal{E})},\quad T_4^{3(m,\mathcal{E})},\quad T_4^{4(m,\mathcal{E})}.$$

Cependant, remarquons que l'on a d'une façon générale :

$$(141)\qquad T^{\alpha\beta}_{(m,\mathcal{E})} \equiv T^{\beta\alpha}_{(m,\mathcal{E})} \equiv \sum_\gamma g^{\gamma\beta} T_\gamma^{\alpha(m,\mathcal{E})} \equiv \sum_\gamma g^{\gamma\alpha} T_\gamma^{\beta(m,\mathcal{E})}.$$

Dans un champ de Minkowski, ces relations deviennent

$$(142)\quad \begin{cases} T^{ab}_{(m,\mathcal{E})} \equiv T^{ba}_{(m,\mathcal{E})} \equiv -T_b^{a(m,\mathcal{E})} = -T_a^{b(m,\mathcal{E})} \qquad a, b = 1, 2, 3 \\ T^{a4}_{(m,\mathcal{E})} \equiv T^{4a}_{(m,\mathcal{E})} \equiv \dfrac{1}{c^2}\, T_4^{a(m,\mathcal{E})} = -T_a^{4(m,\mathcal{E})} \\ T^{44}_{(m,\mathcal{E})} \equiv \dfrac{1}{c^2}\, T_4^{4(m,\mathcal{E})}. \end{cases}$$

Il résulte de (142) qu'ici les $T_a^{b(m,e)}$ sont symétriques ($a, b = 1, 2, 3$); donc, en vertu de (138), la fonction W ne renfermera pas $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ explicitement. Il résulte de (142), que les $T_4^{a(m,e)}$ ne diffèrent de $T_a^{4(m,e)}$ fournis par (139), que par le facteur $(-c^2)$.

Dans un champ de Minkowski, nous avons donc calculé toutes les composantes du tenseur $T_\alpha^{\beta(m,e)}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$), sauf $T_4^{4(m,e)}$; on sait que $T_4^{4(m,e)}$ a les dimensions de l'énergie par unité de volume ; il y aura donc lieu de l'égaler à la densité de l'énergie élastique (de déformation). On pourrait aussi reprendre toutes ces théories dans l'espace-temps grâce aux corps parfaits définis dans notre *Théorie des champs gravifiques* (*loc. cit. éq.* 328).

20. Tensions de radiations. — Envisageons, avec Léon Brillouin (1), le cas d'une *onde électromagnétique* se propageant suivant l'axe des x ; soit H_y (ou H_y^*) le champ électrique, $\mathcal{H}_z$ le champ magnétique. On aura, en vertu de (130) et de la définition d'une onde électromagnétique

$$(143) \qquad -W = B \cdot H = \mathcal{B} \cdot \mathcal{H}.$$

La vitesse de l'onde sera donc

$$(144) \qquad V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

où ε et μ sont respectivement le pouvoir inducteur spécifique et la perméabilité magnétique du système considéré. On a

$$(145) \qquad \frac{\partial \log D}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(x_x + y_y + z_z)$$

où D représente la densité massique ; d'où, pour un *corps isotrope*

$$(146) \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial x_x}\right)_{B,\mathcal{B}} = \left(\frac{\partial W}{\partial y_y}\right)_{B,\mathcal{B}} = \left(\frac{\partial W}{\partial z_z}\right)_{B,\mathcal{B}}$$
$$= \left(\frac{\partial W}{\partial(x_x + y_y + z_z)}\right)_{B,\mathcal{B}} = -\left(\frac{\partial W}{\partial \log D}\right)_{B,\mathcal{B}}.$$

(1) Léon Brillouin. Les tensions de Radiation ; leur interprétation en Mécanique classique et en relativité (J. de Ph., série 6, t. VI, nº 11, pp. 337-353).

En vertu de (143) et (144), on obtient aisément

(147) $$= - W \left(\frac{\partial \log V}{\partial \log D}\right)_{B,\mathfrak{B}}.$$

En formant grâce aux formules (136 à 139) et aux formules (142), le tenseur, à la fois électromagnétique et de striction

(148) $$\| T^{\alpha\beta(e)} + T^{\alpha\beta(m,e)} \|$$

on obtient enfin le *tenseur de* L. BRILLOUIN *complété*

(149) $$\left|\begin{matrix} W - W\dfrac{\partial \log V}{\partial \log D} & 0 & 0 & -\dfrac{VW}{c^2}\left[\dfrac{1+\left(\dfrac{c}{V}\right)^2}{2}\right]+\left(\dfrac{\partial W}{\partial x_t}\right)_{B,\mathfrak{B}} \\ 0 & -W\dfrac{\partial \log V}{\partial \log D} & 0 & \left(\dfrac{\partial W}{\partial y_t}\right)_{B,\mathfrak{B}} \\ 0 & 0 & -W\dfrac{\partial \log V}{\partial \log D} & \left(\dfrac{\partial W}{\partial z_t}\right)_{B,\mathfrak{B}} \\ -\dfrac{VW}{c^2}\left[\dfrac{1+\left(\dfrac{c}{V}\right)^2}{2}\right]+\left(\dfrac{\partial W}{\partial x_t}\right)_{B,\mathfrak{B}} & \left(\dfrac{\partial W}{\partial y_t}\right)_{B,\mathfrak{B}} & \left(\dfrac{\partial W}{\partial z_t}\right)_{B,\mathfrak{B}} & -\dfrac{1}{c^2}[W+P^{44(m,e)}]. \end{matrix}\right|$$

21. FORMULE DE HELMHOLTZ-LIPPMAN (Champ de MINKOWSKI). — Considérons le cas de corps massiques *parfaits, isotropes* et *au repos* et supposons *négligeables la variation de la densité massique dans le temps*, ainsi que les *tensions de* MAXWELL. D'autre part, soit $f(D)$, l'expression de la pression en fonction de la densité. En tenant compte des formules que nous avons trouvées pour le tenseur de l'électrostriction, on obtient très facilement

(150) $$\left(\frac{\partial f(D)}{\partial D}\right)_0 (D - D_0) = W_e \frac{\partial \log \varepsilon}{\partial \log D} + W_\mu \frac{\partial \log \mu}{\partial \log D}$$

où

(151) $$W_e = \frac{1}{2} B \cdot H \qquad \text{et} \qquad W_\mu = \frac{1}{2} \mathfrak{B} \cdot \mathcal{H}.$$

Thermodynamique relativiste

22. Premier principe de la thermodynamique. — Nous écrivons le premier principe sous la forme [1]

$$\frac{d}{ds}\left(\mathfrak{U}\delta(x_1\cdots x_4)\right) = \mathfrak{Q}\delta(x_1\cdots x_4) - \mathfrak{K}\delta(x_1\cdots x_4) \tag{152}$$

ou sous la forme équivalente

$$\sum_\alpha \frac{\partial\left(\mathfrak{U}u^\alpha\right)}{\partial x^\alpha} = \mathfrak{Q} - \mathfrak{K}. \tag{153}$$

Le symbole $\mathfrak{U}$ est le facteur de densité d'énergie *interne* du système ; $\mathfrak{Q}$ est un facteur d'apports calorifiques à ce système. Un élément de l'espace-temps est représenté par $\delta(x^1\cdots x^4)$. Le symbole $\mathfrak{K}$ a été défini en (115). Voici les dimensions de ces symboles, en coordonnées cartésiennes :

$$\mathfrak{Q}\delta x\delta y\delta z\delta t \equiv \text{énergie}$$
$$\mathfrak{K}\delta x\delta y\delta z\delta t \equiv \text{énergie}$$
$$\mathfrak{U}\delta x\delta y\delta z\delta t \equiv \text{énergie} \times \text{longueur}.$$

Utilisons les *coordonnées rectangulaires dextrogyres*. La relation (153) s'écrira

$$\frac{\partial\left(\mathfrak{U}V^{-1}v^\alpha\right)}{\partial x_\alpha} = \mathfrak{Q} - \mathfrak{K} \tag{154}$$

où

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt} \quad \text{et} \quad V \equiv \frac{ds}{dt}. \tag{155}$$

Multiplions les deux membres de (154) par dv défini par $dv = \delta x\delta y\delta z$; d'où en vertu de la théorie des invariants intégraux.

$$\frac{d}{dt}\int_v \mathfrak{U}V^{-1}\delta v = \int_v \mathfrak{Q}\delta v - \int_v \mathfrak{K}\delta v. \tag{156}$$

Posons

$$\overline{V^{-1}}\int_v \mathfrak{U}\delta v \equiv \int_v \mathfrak{U}V^{-1}\delta v \tag{157}$$

(1) Th. de Donder. Comptes rendus de l'Ac. des Sc. de Paris, t. **186**, pp. 1599-1601, 1928, et t. **187**, pp. 28-30, 1928.

où $\overline{V^{-1}}$ représente la moyenne de V^{-1} prise dans tout le système considéré.

Posons de même

$$(158)\qquad \begin{cases} U \equiv \frac{1}{c} \int_v \mathfrak{U} \delta v \\ \frac{dQ}{dt} \equiv \int_v \frac{V}{c}\, \mathfrak{Q} \delta v \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{V}}{c} \int_v \mathfrak{Q} \delta v \end{cases}$$

en représentant par $\overline{V}$ la moyenne de V prise dans le système considéré.

Alors l'équation (156) s'écrira

$$(159)\qquad \frac{d}{dt}\left[c\overline{V^{-1}}U\right] = \frac{dQ}{dt}\frac{c}{\overline{V}} - \int_v \mathcal{K} \delta v.$$

Nous dirons que U est l'énergie interne du corps à l'instant t et que dQ est la chaleur reçue par ce corps pendant dt.

Dans le cas de corps massiques parfaits, il est facile, en tenant compte de (115) d'écrire (159) sous la forme

$$(160)\qquad \frac{d}{dt}\left[c\overline{V^{-1}}U\right] = \frac{dQ}{dt}\frac{c}{\overline{V}} - \overline{p} c \overline{V^{-1}} \oint_\sigma v_\nu \delta\sigma + cp \frac{\partial u^4}{\partial t} \delta v$$

où V_ν représente la composante suivant la demi-normale ν extérieure aux corps en un point de l'élément $\delta\sigma$ pris sur la surface fermée σ limitant ce corps.

Or, on a évidemment

$$(161)\qquad \oint_\sigma v_\nu \delta\sigma \equiv \frac{dv}{dt}.$$

Nous retrouvons donc en première approximation, le *premier principe de la thermodynamique classique* :

$$(162)\qquad \boxed{d\mathfrak{U} = dQ - \overline{p}\,\delta v.}$$

23. Deuxième principe de la Thermodynamique. — En relativité générale, nous écrirons ce second principe comme suit :

$$(164)\qquad \frac{d}{ds}\left[\mathcal{S}\delta(x^1 \cdots x^4)\right] = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}^*}{T^*}\, \delta(x^1 \cdots x^4)$$

où $\mathcal{S}$ est le facteur de densité *entropique*; où $\mathfrak{Q}^*$ est le facteur (positif)

d'apport de chaleur *non compensée* (ou de viscosité physico-chimique) ; où enfin T* est le scalaire (positif) *thermique*.

De (164), on déduit que

$$\frac{\partial(\mathcal{S}u^{\alpha})}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}^*}{T^*}. \tag{165}$$

Retournons à l'image euclidienne ; on aura, comme au (156),

$$\frac{d}{dt}\int \mathcal{S}V^{-1}\delta v = \frac{1}{\overline{T^*}}\int_v (\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}^*)\delta v \tag{166}$$

où $\overline{T^*}$ est la moyenne de T* dans le système considéré.

Posons maintenant :

$$S = \int_v \mathcal{S}V^{-1}\delta v \tag{167}$$

et, comme au (158)

$$\frac{dQ^*}{dt} = \frac{\overline{V}}{c}\int_v \mathfrak{Q}^*\delta v. \tag{168}$$

Alors l'équation (166) deviendra

$$\frac{dS}{dt} = \frac{c}{\overline{T^*}\,\overline{V}}\left(\frac{dQ}{dt} + \frac{dQ^*}{dt}\right). \tag{169}$$

Posons

$$T \equiv \overline{T^*}\,\frac{\overline{V}}{c} \tag{170}$$

d'où l'équation différentielle exprimant le *second principe* de la thermodynamique *classique*

$$\boxed{dS = \frac{dQ + dQ^*}{T}}. \tag{171}$$

24. Thermodynamique des systèmes électromagnétiques doués d'hystérèse et animés d'un mouvement quelconque. — Utilisons le premier principe de la Thermodynamique en substituant (115) dans (152) ; d'où [1]

$$\frac{d}{ds}[\mathfrak{U}\delta(x^1\cdots x^4)] = \mathfrak{Q}\delta(x^1\cdots x^4) - \left[\mathfrak{K}^{(m)} + \mathcal{H}^{(e)}_{\alpha}u^{\alpha} + \mathfrak{K}^{(e)}\right]\delta(x^1\cdots x^4) \tag{172}$$

(1) *Addenda.* Pour compléter cette théorie énergétique, il y aura lieu de poser

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{(m)} + \mathfrak{U}^{(m,e)} + \mathfrak{U}^{(e)}$$

et d'admettre que

$$\mathfrak{U}^{(e)} = \mathfrak{T}^{(e)}_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}.$$

Utilisons maintenant le second principe de la Thermodynamique en substituant (172) dans (164) ; d'où

$$(173)\quad \frac{d}{ds}[\mathcal{U}\delta(x^1\cdots x^4)] - T^*\frac{d}{ds}[\mathcal{S}\delta(x^1\cdots x^4)] = \\ -\left[\mathcal{K}^{(m)} + \mathcal{H}_\alpha^{(e)}u^\alpha + \mathcal{K}^{(e)}\right]\delta(x^1\cdots x^4) - \mathcal{Q}^*\delta(x^1\cdots x^4).$$

On pourrait faire apparaître dans cette relation, la fonction $\mathcal{U}-T^*\mathcal{S}$ qui généraliserait l'*énergie libre*.

Mécanique ondulatoire de Dirac généralisée

25. Equations gravifiques et électroniques. — Présentons sous une forme tout à fait synthétique l'étude des systèmes électromagnétiques les plus généraux que nous avons considéré au début du présent travail. A cet effet, rappelons d'abord les *dix équations gravifiques* ; à savoir

$$(174)\qquad \frac{\delta\left(\mathfrak{M}^g - \mathfrak{N}W^2 + \mathfrak{M}_*^{(m)} + \mathfrak{M}_*^{(m,e)} + \mathfrak{M}_*^{(e)}\right)}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0$$

où les fonctions caractéristiques $\mathfrak{M}^g$, etc. écrites ci-dessus ont été définies précédemment.

Passons maintenant aux quatre *équations électroniques* ou *maxwelliennes* dont nous avons indiqué la généralisation dans (82) et (83), et supposons qu'il n'y ait pas de courant magnétique, c'est-à-dire que $C_*^\alpha = 0$. Dans ce cas, on pourra écrire

$$(175)\qquad \mathcal{K}_*^{\overline{\alpha\beta}} = \Phi_{\alpha,\beta} - \Phi_{\beta,\alpha}.$$

Autrement dit, ces quantités dérivent d'un potentiel vecteur électromagnétique $\Phi_1\cdots\Phi_4$. Nous allons aussi écrire ces équations maxwelliennes sous forme de dérivées variationnelles ; à savoir :

$$(176)\qquad \frac{\delta\left(\mathfrak{M}^g - \mathfrak{N}W^2 + \mathfrak{M}_*^{(m)} + \mathfrak{M}_*^{(m,e)} + \mathfrak{M}_*^{(e)}\right)}{\delta\Phi_\alpha} = 0.$$

Précisons la manière dont la dérivée variationnelle par rapport à Φ_α doit être prise dans (176) pour qu'on obtienne les équations (82)

et (83) susmentionnées. Pour cela, reportons-nous à $\mathfrak{M}_*^{(e)}$ dont la valeur est explicitement donnée en (98). Dans cette expression, nous considérons les $K_{\alpha i}$ comme fonctions *uniquement* de $x_1 \ldots x_4$ (et non de Φ_α) ; les variations de ces fonctions par rapport aux Φ_α seront donc nulles.

Retournons à (176). Nous savons que $\mathfrak{M}^g$, $\mathfrak{N}W^2$, $\mathfrak{M}_*^{(m)}$ ne dépendent pas des Φ_α.

Posons

$$\frac{\delta \mathfrak{M}^{(m,e)}}{\delta \Phi_\alpha} = \mathcal{C}^\alpha_{(e)} \tag{177}$$

où $\mathcal{C}^\alpha_{(e)}$ représente le courant électrique (total).

Les dix équations *gravifiques* (174) peuvent alors s'écrire explicitement

$$-\frac{1}{2}(a + bC)g_{\alpha\beta} + b\mathcal{G}_{\alpha\beta} = Nu_\alpha u_\beta + P_{\alpha\beta} + T^{(e)}_{\alpha\beta} \tag{178}$$

et les quatre équations *maxwelliennes* s'écriront explicitement, grâce à (177),

$$\frac{\partial \mathcal{K}^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \mathcal{C}^\alpha_{(e)}. \tag{179}$$

26. Equations photoniques. — Nous admettons que les équations du *champ photonique* sont de la même forme qjue les équations électroniques (maxwelliennes) données par (82) et (83) ; posons donc pour ces équations photoniques [1] :

$$\frac{d\mathfrak{U}^{\alpha\beta}}{dx_\beta} = \mathcal{C}^\alpha_{(ph)} \tag{180}$$

$$\frac{d\mathfrak{U}_*^{\alpha\beta}}{dx_\beta} = \mathcal{C}^\alpha_{\times(ph)} \tag{181}$$

où $\mathfrak{U}^{\alpha\beta}$ représente *la force photonique* et $\mathfrak{U}_*^{\alpha\beta}$ *la force dualistique photonique*. Ces tenseurs antisymétriques sont donc les analogues de $\mathcal{K}^{\alpha\beta}$ et $\mathcal{K}_*^{\alpha\beta}$. Les symboles $\mathcal{C}^\alpha_{(ph)}$ et $\mathcal{C}^\alpha_{\times(ph)}$ sont les courants *totaux* dans le champ photonique considéré.

(1) Th. de Donder. *Le champ photonique* Bull. Ac. Roy. Belg., 2 juin 1928, pp. 307-312.

Toutes les grandeurs qui figurent dans ce paragraphe seront considérés comme étant *complexes* ; elles renferment donc chacune une partie réelle et une partie imaginaire pure.

Pour établir *un lien* entre le champ photonique et le champ électronique (de Maxwell), posons (¹) :

(182) $$\mathcal{C}^{\alpha}_{(ph)} \equiv \varkappa\Phi_{\beta}\mathfrak{U}^{\alpha\beta} + \mathcal{A}^{\alpha}$$

(183) $$\mathcal{C}^{\alpha}_{\times(ph)} \equiv \varkappa\Phi_{\beta}\mathfrak{U}^{\alpha\beta}_{*} + \mathcal{A}^{\alpha}_{\times}.$$

Donc les $\mathcal{A}^{\alpha}$ et $\mathcal{A}^{\alpha}_{\times}$ définissent les courants photoniques *diminués* des courants d'interaction entre le champ photonique et électrique.

En substituant (182) et (183) dans (180) et (181), on aura une nouvelle forme des équations photoniques :

(184) $$\left[\frac{d\mathfrak{U}^{\alpha\beta}}{dx_{\beta}}\right] = \mathcal{A}^{\alpha}$$

(185) $$\left[\frac{d\mathfrak{U}^{\alpha\beta}_{*}}{dx_{\beta}}\right] = \mathcal{A}^{\alpha}_{\times}$$

où l'on a posé

(186) $$\left[\frac{d}{dx_{\beta}}\right] \equiv \frac{d}{dx_{\beta}} - \varkappa\Phi_{\beta}.$$

On a posé

(187) $$\varkappa = \frac{2i\pi ec}{h}.$$

Par analogie avec la manière d'exprimer les forces électriques et magnétiques au moyen des potentiels Φ_{α} électromagnétiques, posons ici

(188) $$\chi U_{\mu\nu} = [P_{\mu\nu}] + [Q^{*}_{\mu\nu}]$$

(189) $$\chi U^{*}_{\mu\nu} = [P^{*}_{\mu\nu}] - [Q_{\mu\nu}]$$

où

(190) $$[P_{\mu\nu}] = \left[\frac{dP_{\nu}}{dx_{\mu}} - \frac{dP_{\mu}}{dx_{\nu}}\right]; \qquad [Q_{\mu\nu}] = \left[\frac{dQ_{\nu}}{dx_{\mu}} - \frac{dQ_{\mu}}{dx_{\nu}}\right]$$

où les *crochets* figurant dans les seconds membres de (190) doivent être

appliqués à chacun des termes qu'ils renferment ; ils ont la même signification qu'en (186). Le symbole $Q^*_{\mu\nu}$ signifie qu'il faut prendre la dualistique de $Q_{\mu\nu}$. D'autre part, les P_α et Q_α sont les *potentiels photoniques* (1).

On a posé

(191)
$$\chi \equiv \frac{2i\pi mc}{h}.$$

Toujours par analogie, avec le champ électronique maxwellien, écrivons les équations complémentaires photoniques ; à savoir

(192)
$$\left[\frac{d\mathcal{P}^\alpha}{dx_\alpha}\right] = \chi\mathcal{S}$$

(193)
$$\left[\frac{d\mathcal{Q}^\alpha}{dx_\alpha}\right] = x\mathcal{B}$$

où $\mathcal{S}$ et $\mathcal{B}$ sont les *potentiels de l'éther* (2).

Diminuons maintenant les courants photoniques $\mathcal{A}^\alpha$ et $\mathcal{A}^\alpha_\times$ des gradients (contravariants) de ces potentiels S et B de l'éther ; d'où

(194)
$$\mathcal{D}^\alpha \equiv \mathcal{A}^\alpha - \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\left[\frac{dS}{dx_\beta}\right]$$

(195)
$$\mathcal{D}^\alpha_\times \equiv \mathcal{A}^\alpha_\times - \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\left[\frac{dB}{dx_\beta}\right].$$

Nous dirons que $\mathcal{D}^\alpha$ et $\mathcal{D}^\alpha_\times$ sont les *courants photoniques proprement dits.*

Remarquons qu'en vertu de (180) et (181), on aura les théorèmes de *conservation photonique.*

(196)
$$\frac{dC^\alpha_{(ph)}}{dx_\alpha} = 0$$

(197)
$$\frac{dC^\alpha_{\times(ph)}}{dx_\alpha} = 0.$$

(1) J. M. WHITTAKER. Proc. Roy. Soc., n° 788, p. 543 (3 décembre 192).
(2) Th. DE DONDER, *loc. cit.* (2 juin 1928).

27. Principe de correspondance pour les systèmes ondulatoires. — Introduisons maintenant la fonction caractéristique

$$\mathfrak{M}^{g} + \underset{*}{\mathfrak{M}}^{(e)} + \mathfrak{M}^{(ph)}. \tag{198}$$

Si nous comparons cette fonction à celle qui figure dans (174), on voit qu'on a remplacé dans cette dernière tous les termes massiques $\left[-\mathfrak{N}W^2 + \underset{*}{\mathfrak{M}}^{(m)} + \underset{*}{\mathfrak{M}}^{(m,e)}\right]$ par le seul terme photonique $\mathfrak{M}^{(ph)}$. Nous allons maintenant définir la fonction $\mathfrak{M}^{(ph)}$ au moyen des potentiels photoniques P_μ et Q_μ et des potentiels électromagnétiques Φ_α. Nous écrivons, pour simplifier

$$\xi_\mu = \varkappa\Phi_\mu. \tag{199}$$

Posons, avec J. M. Whittaker

$$\mathfrak{M}^{(ph)} \equiv \sqrt{-g}\left\{U^{\mu\nu}\overline{U}_{\mu\nu} + 2(S\overline{S} - B\overline{B}) - 2(P^\mu\overline{P_\mu} - Q^\mu\overline{Q_\mu})\right\} \tag{200}$$

les tirets figurant dans (200) indiquant qu'il faut prendre l'imaginaire *conjuguée* de l'expression qui en est affectée.

Prenons les dérivées variationnelles de $\mathfrak{M}^{g} + \underset{*}{\mathfrak{M}}^{(e)} + \mathfrak{M}^{(ph)}$ par rapport à $g^{\alpha\beta}$, à Φ_α et aux potentiels photoniques P_μ, Q_μ, $\overline{P_\mu}$, $\overline{Q_\mu}$. Nous aurons alors les *équations gravifiques de la mécanique ondulatoire* :

$$\frac{\delta\left(\mathfrak{M}^{g} + \underset{*}{\mathfrak{M}}^{(e)} + \mathfrak{M}^{(ph)}\right)}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0 \tag{201}$$

les équations électroniques ou maxwelliennes de la mécanique ondulatoire :

$$\frac{\delta\left(\mathfrak{M}^{g} + \underset{*}{\mathfrak{M}}^{(e)} + \mathfrak{M}^{(ph)}\right)}{\delta\Phi_\alpha} = 0 \tag{202}$$

et enfin les *équations photoniques de la mécanique ondulatoire* :

$$\frac{\delta\left(\mathfrak{M}^{g} + \underset{*}{\mathfrak{M}}^{(e)} + \mathfrak{M}^{(ph)}\right)}{\delta P_\mu} = 0\,; \qquad \frac{\delta\left(\mathfrak{M}^{g} + \underset{*}{\mathfrak{M}}^{(e)} + \mathfrak{M}^{(ph)}\right)}{\delta Q_\mu} = 0 \tag{203}$$

$$\frac{\delta\left(\mathfrak{M}^{g} + \underset{*}{\mathfrak{M}}^{(e)} + \mathfrak{M}^{(ph)}\right)}{\delta\overline{P_\mu}} = 0\,; \qquad \frac{\delta\left(\mathfrak{M}^{g} + \underset{*}{\mathfrak{M}}^{(e)} + \mathfrak{M}^{(pp)}\right)}{\delta\overline{Q_\mu}} = 0. \tag{204}$$

En effectuant les calculs indiqués dans (201), nous obtenons explicitement

(205) $$-\frac{1}{2}(a + bC)g^{\alpha\beta} + b\mathcal{G}^{\alpha\beta} = T_{(e)}^{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta}$$

où $T_{(e)}^{\alpha\beta}$ est l'expression contravariante de (99) et où l'on a posé

(206) $$M^{\alpha\beta} \equiv -2L^{\alpha\beta} + \left(\frac{1}{2}L - P^{\mu}\overline{P_{\mu}} + Q^{\mu}\overline{Q_{\mu}}\right)g^{\alpha\beta} + 2N^{\alpha\beta} - 2O^{\alpha\beta} + 2P^{\alpha}\overline{P^{\beta}} - 2Q^{\alpha}\overline{Q^{\beta}}.$$

Dans cette expression les symboles $L^{\mu\nu}$, L, $N^{\mu\nu}$, $O^{\mu\nu}$, sont définis par les relations suivantes :

(207) $$gL^{k\alpha\lambda\beta} \equiv \frac{h^2}{4\pi^2 m^2 c^4}\left(-[P_{\overline{\alpha\beta}}][\overline{P_{k\lambda}}] + [\overline{Q_{\alpha\beta}}][Q_{\overline{k\lambda}}]\right)$$

(208) $$L^{\alpha\beta} = g_{\gamma\delta}L^{\alpha\beta\gamma\delta} \qquad L = g_{\alpha\beta}L^{\alpha\beta}$$

(209) $$N^{\alpha\beta} \equiv \left(\frac{1}{2}\overline{P^{\mu}}g^{\alpha\beta} - \overline{P^{\beta}}g^{\alpha\mu}\right)\left(\frac{1}{\chi}\left[\frac{dS}{dx_{\mu}}\right]\right) + \text{conjuguée} - \frac{1}{2}S\overline{S}g^{\alpha\beta}$$

(210) $$O^{\alpha\beta} \equiv \left(\frac{1}{2}\overline{Q^{\mu}}g^{\alpha\beta} - \overline{Q^{\beta}}g^{\alpha\mu}\right)\left(\frac{1}{\chi}\left[\frac{dB}{dx_{\mu}}\right]\right) + \text{conjuguée} - \frac{1}{2}B\overline{B}g^{\alpha\beta}.$$

En effectuant les calculs indiqués dans (202) nous obtenons explicitement :

(211) $$\frac{d\mathcal{K}^{\alpha\beta}}{dx_{\beta}} = -\frac{e\sqrt{-g}}{mc^3}\left(U^{\alpha\beta}\overline{P_{\beta}} + U_{*}^{\alpha\beta}\overline{Q_{\beta}} + S\overline{P^{\alpha}} - B\overline{Q^{\alpha}} + \text{conjuguée}\right).$$

Enfin, en effectuant les calculs indiqués dans (203) et (204), nous obtenons les relations suivantes ainsi que les conjuguées :

(212) $$\left[\frac{d\mathfrak{U}^{\alpha\beta}}{dx_{\beta}}\right] = \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\left[\frac{dS}{dx_{\beta}}\right] - \chi\mathfrak{P}^{\alpha}$$

(213) $$\left[\frac{d\mathfrak{U}_{*}^{\alpha\beta}}{dx_{\beta}}\right] = \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\left[\frac{dB}{dx_{\beta}}\right] - \chi\mathfrak{Q}^{\alpha}.$$

En *identifiant* (1) *les équations* (178) et (205), (179) et (211), (184) avec les équations (212), (185) et (213), on obtient les équations qui

(1) J'ai indiqué cette méthode d'identification pour trouver le principe correspondance. dans mes travaux antérieurs (voir ma note parue dans Bull. Ac. R. des Belg. Cl. des Sciences, 5e série, t. XIII. Séance du 2 août 1927).

expriment le *principe de correspondance* en mécanique ondulatoire

Les équations (178) et (205) donnent

$$\boxed{Nu^\alpha u^\beta + P^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta}} \tag{214}$$

où $M^{\alpha\beta}$ est donné par (206)

Les équations (179) et (211) donnent

$$\boxed{\mathcal{C}^\alpha_{(e)} = -\frac{e\sqrt{-g}}{mc^3}\left(U^{\alpha\beta}\overline{P_\beta} + U_*^{\alpha\beta}\overline{Q_\beta} + S\overline{P^\alpha} - B\overline{Q^\alpha} + \text{conjuguée}\right)} \tag{215}$$

Enfin, les équations (179) et (211) ainsi que (184) et (212), donnent, lorsqu'on tient compte de (194) et (195),

$$\boxed{\mathcal{D}^\alpha = -\chi\mathcal{L}^\alpha} \qquad \boxed{\mathcal{D}^\alpha_\times = -\chi\mathcal{Q}^\alpha} \tag{216}$$

On voit donc qu'il est possible d'exprimer le *tenseur matériel*, le *courant électrique* et les *courants photoniques proprement dits* en fonction des *potentiels photoniques de Whittaker*.

28. Théorème de l'impulsion et de l'énergie et théorème de la conservation de l'électricité, exprimés au moyen des potentiels photoniques. — Retournons au théorème de l'impulsion et de l'énergie (102) et remplaçons dans le tenseur $T^{\alpha\beta}$ la partie massique $Nu^\alpha u^\beta + P^{\alpha\beta}$ par sa valeur $M^{\alpha\beta}$ donnée en (206). On aura alors

$$\left(M^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta}_{(e)}\right)_{.\beta} = 0 \tag{217}$$

qui exprime le *théorème de l'impulsion et de l'énergie photonique.*

De même, retournons au théorème de la conservation de l'électricité (91), et dans l'équation

$$\frac{d\mathcal{C}^\alpha_{(e)}}{dx_\alpha} = 0 \tag{218}$$

remplaçons $\mathcal{C}^\alpha_{(e)}$ par sa valeur (211).

On aura le *théorème de la conservation de l'électricité* (exprimé au moyen des potentiels photoniques).

29. ÉQUATION DALEMBERTIENNE OU DE PROPAGATION DES POTENTIELS PHOTONIQUES. — En remplaçant dans (212) et (213), les $\mathfrak{U}^{\alpha\beta}$ et $\mathfrak{U}_*^{\alpha\beta}$ par leur valeur (188) et (189) on obtient les équations du second ordre :

$$(219)\quad g^{\sigma\tau}(\mathrm{P}^{\mu})_{\sigma\tau} + \mathcal{G}^{\mu\nu}\mathrm{P}_{\nu} - \frac{4\pi iec}{h}\,\Phi^{\nu}(\mathrm{P}^{\mu})_{\nu} + \frac{4\pi^2 m^2 c^4}{h^2}\left(1 - \frac{e^2}{m^2c^2}\,\Phi_{\nu}\Phi^{\nu}\right)\mathrm{P}^{\mu} - \frac{2\pi iec}{h}\left\{ \mathrm{H}^{\mu\nu}\mathrm{P}_{\nu} - \mathrm{H}^{\overline{\mu\nu}}\mathrm{Q}_{\nu} \right\} = 0$$

et

$$(220)\quad g^{\sigma\tau}(\mathrm{Q}^{\mu})_{\sigma\tau} + \mathcal{G}^{\mu\nu}\mathrm{Q}_{\nu} - \frac{4\pi iec}{h}\,\Phi^{\nu}(\mathrm{Q}^{\mu})_{\nu} + \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2}\left(1 - \frac{e^2}{m^2c^2}\,\Phi_{\nu}\Phi^{\nu}\right)\mathrm{Q}^{\mu} - \frac{2\pi iec}{h}\left\{ \mathrm{H}^{\mu\nu}\mathrm{P}_{\nu} - \mathrm{H}^{\overline{\mu\nu}}\mathrm{Q}_{\nu} \right\} = 0$$

ainsi que des équations conjuguées.

30. ÉQUATIONS ONDULATOIRES DE DIRAC. — Nous allons appliquer les équations générales ci-dessus au cas particulier d'un champ de Minkowski et nous choisirons les variables de telle façon que les ds^2 définissant celui-ci soit de la forme

$$(221)\quad ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}\,(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Au lieu du potentiel vecteur Φ_α que nous avons utilisé ci-dessus, nous utiliserons avec Whittaker le potentiel Φ'_α lié au précédent par la relation

$$(222)\quad \Phi'_\alpha = \frac{1}{c^2}\,\Phi_\alpha.$$

En utilisant les notations que nous avons définies précédemment, nous aurons

$$(223)\quad \Phi_1' = -\frac{1}{c^2}\,\mathrm{A}_x,\qquad \Phi_2' = -\frac{1}{c^3}\,\mathrm{A}_y,\qquad \Phi_3' = -\frac{1}{c^2}\,\mathrm{A}_z$$
$$\Phi_4' = c\mathrm{V}.$$

Nous poserons de même

$$(224)\quad \mathrm{X}_{\mu\nu} = \frac{\partial\Phi'_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\Phi'_\mu}{\partial x_\nu}$$

ce qui nous donne, en vertu de (175),

$$(225) \qquad X_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu}\right) = -\frac{1}{c^2}\,\overline{\mathcal{K}^{\mu\nu}_{*}}.$$

Nous supposerons, dans ce paragraphe, qu'il n'y a ni polarisation électrique ni polarisation magnétique, de sorte que nous pourrons écrire

$$(226) \qquad X_{\mu\nu} = -\frac{1}{c^2}\,H_{\mu\nu}.$$

Remarquons que chez Whittaker, les indices μ, ν, etc. varient de 0 à 3 au lieu de 1 à 4. Pour plus d'uniformité nous utiliserons ici cette manière de procéder et choisirons 0, 1, 2, 3 comme permutation fondamentale.

Grâce à (221), nous pouvons déduire très facilement de (226) les composantes $H^{\mu\nu}$; à savoir

$$(227) \qquad X^{\mu\nu} = -c^2 H^{\mu\nu}.$$

Ecrivons, comme précédemment,

$$(228) \qquad \left\{\begin{array}{l} X_{01} = \frac{1}{c^2}H_{14} = \frac{1}{c}H_x \\ X_{02} = \frac{1}{c^2}H_{24} = \frac{1}{c}H_y \\ X_{03} = \frac{1}{c^2}H_{34} = \frac{1}{c}H_z \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} X_{23} = -\frac{1}{c^2}\mathcal{H}_{23} = -\frac{1}{c^2}\mathcal{H}_x \\ X_{31} = -\frac{1}{c^2}\mathcal{H}_{31} = -\frac{1}{c^2}\mathcal{H}_y \\ X_{12} = -\frac{1}{c^2}\mathcal{H}_{12} = -\frac{1}{c^2}\mathcal{H}_z. \end{array}\right.$$

Il en résulte, (227), que

$$(229) \qquad \left\{\begin{array}{ll} X^{01} = -cH_x & X^{23} = \mathcal{H}_x \\ X^{02} = -cH_y & X^{31} = \mathcal{H}_y \\ X^{02} = -cH_z & X^{12} = \mathcal{H}_z. \end{array}\right.$$

Rappelons que H et $\mathcal{H}$ sont les forces électrique et magnétique. Posons encore, avec Whittaker

$$(230) \qquad P_0 \equiv P_t, \quad P_1 \equiv -\frac{1}{c}P_x, \quad P_2 \equiv -\frac{1}{c}P_y, \quad P_3 \equiv -\frac{1}{c}P_z$$

et

$$(231) \qquad Q_0 \equiv Q_t, \quad Q_1 \equiv -\frac{1}{c}Q_x, \quad Q_2 \equiv -\frac{1}{c}Q_y, \quad Q_3 \equiv -\frac{1}{c}Q_z.$$

Nous aurons donc, grâce à (221)

(232) $P^0 \equiv P_t, \quad P^1 \equiv - cP_x, \quad P^2 \equiv - cP_y, \quad P^3 \equiv - cP_z$

(233) $Q^0 \equiv Q_t, \quad Q^1 \equiv - cQ_x, \quad Q^2 \equiv - cQ_y, \quad Q^3 \equiv - cQ_z.$

Il nous reste enfin à nous occuper des $U_{\mu\nu}$. Nous poserons

$$(234) \qquad \begin{cases} U_{01} = \frac{1}{c} s_x \\ U_{02} = \frac{1}{c} s_y \\ U_{03} = \frac{1}{c} s_z \end{cases} \qquad \begin{cases} U_{23} = \frac{1}{c^2} b_x \\ U_{31} = \frac{1}{c^2} b_y \\ U_{12} = \frac{1}{c^2} b_z \end{cases}$$

ce qui donne immédiatement

$$(235) \qquad \begin{cases} U^{01} = - cs_x \\ U^{02} = - cs_y \\ U^{03} = - cs_z \end{cases} \qquad \begin{cases} U^{23} = c^2 b_x \\ U^{31} = c^2 b_y \\ U^{12} = c^2 b_z. \end{cases}$$

Introduisons les notations (223) et (236) dans les équations (212), (213). Nous obtenons

$$(236) \qquad \begin{cases} -\frac{1}{c}\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right] - [\text{rot } b] = \frac{2\pi i}{h} mc\,\mathrm{P} + [\text{grad S}] \\ [\text{div } s] = \frac{2\pi i}{h} mc\,\mathrm{P}_t - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t}\right] \\ -\frac{1}{c}\left[\frac{\partial b}{\partial t}\right] + [\text{rot } s] = \frac{2\pi i}{h} mc\,\mathrm{Q} - [\text{grad B}] \\ [\text{div } b] = \frac{2\pi i}{h} mc\,\mathrm{Q}_t - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t}\right]. \end{cases}$$

Les crochets qui figurent dans ces équations ont la même signification que précédemment.

Dans les équations ci-dessus, les symbôles P, Q désignent les vecteurs ordinaires dont les composantes sont respectivement (P_x, P_y, P_z), (Q_x, Q_y, Q_z). Les scalaires S et B et les vecteurs $b(b_x, b_y, b_z)$ et $s(s_x, s_y, s_z)$ sont définis par les relations (188) et (189) qui deviennent ici :

$$(237) \qquad \begin{cases} \frac{2\pi i}{h} mc\; b = -[\text{rot P}] - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial t}\right] - [\text{grad Q}_t] \\ \frac{2\pi i}{h} mc\; s = [\text{rot Q}] - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t}\right] - [\text{grad P}_t] \\ \frac{2\pi i}{h} mc\;\mathrm{S} = [\text{div P}] + \frac{1}{c}\left[\frac{\partial \mathrm{P}_t}{\partial t}\right] \\ \frac{2\pi i}{h} mc\,\mathrm{B} = [\text{div Q}] + \frac{1}{c}\left[\frac{\partial \mathrm{Q}_t}{\partial t}\right]. \end{cases}$$

A titre d'exemple, montrons ce que devient la première équation vectorielle (237) quand on effectue les opérations indiquées par les crochets ; nous obtenons

$$(238)\quad -\frac{1}{c}\frac{\partial s}{\partial t}-\operatorname{rot} b-\operatorname{grad} S+\frac{2\pi i e}{hc}\left\{ Vs-[A\cdot b]-A\cdot S\right\} =\frac{2\pi i}{h}mc\,P.$$

Les équations (236) ainsi explicitées peuvent être considérées comme les équations ondulatoires, les équations (237) donnant la valeur des vecteurs b et s, et des scalaires B et S. Introduisons ces valeurs dans les équations (236). Nous obtenons :

$$(239)\quad \begin{cases} DP+\frac{2\pi i e}{hc}\left\{ -[\mathcal{H}\cdot P]+H\cdot P_t-[H\cdot Q]-H\cdot Q_t\right\} =0\\ DP_t+\frac{2\pi i e}{hc}\left\{ (H\cdot P)-(\mathcal{H}\cdot Q)\right\} =0\\ DQ+\frac{2\pi i e}{hc}\left\{ -[\mathcal{H}\cdot Q]+H\cdot Q_t+[H\cdot P]+\mathcal{H}\cdot P_t\right\} =0\\ DQ_t+\frac{2\pi i e}{hc}\left\{ (H\cdot Q)+(\mathcal{H}\cdot P)\right\} =0 \end{cases}$$

où D est l'opérateur

$$(240)\quad D=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{4\pi i e}{hc}\left[V\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}\right]$$
$$-\frac{4\pi^2m^2c^2}{h^2c^2}(V^2-A_x^2-A_y^2-A_z^2)$$

Posons

$$(241)\quad \begin{cases} \psi_1=P_z+iQ_t; & \psi_2=P_x+iP_y; & \psi_3=-P_t-iQ_z; & \psi_4=Q_y-iQ_x\\ \omega_1=-P_x+iP_y; & \omega_2=P_z-iQ_t; & \omega_3=Q_y+iQ_x; & \omega_4=P_t-iQ_z. \end{cases}$$

Grâce à ces notations les équations (239) sont équivalentes au système

$$(242)\quad \begin{cases} D\psi_1+\frac{2\pi i e}{hc}(i\mathcal{H}_x\psi_2+\mathcal{H}_y\psi_2+i\mathcal{H}_z\psi_1-H_x\psi_4+iH_y\psi_4-H_z\psi_3)=0\\ D\psi_2+\frac{2\pi i e}{hc}(i\mathcal{H}_x\psi_1-\mathcal{H}_y\psi_1-i\mathcal{H}_z\psi_2-H_x\psi_3-iH_y\psi_3+H_z\psi_4)=0\\ D\psi_3+\frac{2\pi i e}{hc}(i\mathcal{H}_x\psi_3-\mathcal{H}_y\psi_3-i\mathcal{H}_z\psi_4-H_x\psi_2+iH_y\psi_2-H_x\psi_2)=0\\ D\psi_4+\frac{2\pi i e}{hc}(i\mathcal{H}_x\psi_3-\mathcal{H}_y\psi_3-i\mathcal{H}_z\psi_4-H_x\psi_1-iH_y\psi_1+H_z\psi_2)=0 \end{cases}$$

auquel il faut ajouter un système équivalent mais où l'on a remplacé les ψ par des ω. Les équations (242) sont les équations du second ordre auxquelles satisfont les fonctions de Dirac $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$. Si l'on pose

$$(243) \quad \begin{cases} \alpha_1 = -s_z + iB; & \alpha_2 = -s_x - is_y; \quad \alpha_3 = -ib_z + S; \quad \alpha_4 = b_y - ib_x \\ \beta_1 = s_x - is_y; & \beta_2 = -s_z - iB; \quad \beta_3 = ib_x + b_y; \quad \beta_4 = -ib_z - S \end{cases}$$

les équations (236) et (237) sont équivalentes à quatre systèmes de quatre équations ; le premier a la forme suivante

$$(244) \quad \begin{cases} p_0\psi_1 + (p_1 - ip_2)\psi_4 + p_3\psi_3 = -mc\,\alpha_1 \\ p_0\psi_2 + (p_1 + ip_2)\psi_3 - p_3\psi_4 = -mc\,\alpha_2 \\ p_0\psi_3 + (p_1 - ip_2)\psi_2 + p_3\psi_1 = mc\,x_3 \\ p_0 p_4 + (p_1 + ip_2)\psi_1 - p_3\psi_2 = mc\,\alpha_4 \end{cases}$$

où

$$(245) \quad p_0 = -\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{e}{c}V; \qquad p_1 = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x; \qquad \text{etc...}$$

Pour obtenir le 2[d] système, il suffit de permuter ψ et α ; à savoir

$$(246) \quad \begin{cases} p_0\alpha_1 + (p_1 - ip_2)\alpha_4 + p_3\alpha_3 = -mc\psi_1 \\ \text{etc} \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Pour obtenir le 3[me] système, il suffit dans (244) de remplacer ψ par ω et α par β, et enfin pour le 4[me] système, de permuter ω et β dans le troisième.

Il en résulte que si $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ est une solution des équations de Dirac,

$$(247) \qquad \alpha_\mu = \beta_\mu = \omega_\mu = \psi_\mu \qquad \mu = 1, 2, 3, 4$$

constitue une solution de (236) et (237).

Examinons ce que deviennent ici les composantes

$$C^\alpha_{(e)} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\mathfrak{C}^\alpha_{(e)} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

du courant électrique (215). Nous poserons

$$(248) \qquad C^4_{(e)} = \rho, \qquad C^1_{(e)} \equiv j_x, \qquad C^2_{(e)} = j_y, \qquad C^3_{(e)} = j_z.$$

En introduisant dans (215) les notations (223) à (235), on obtient

$$(249)\quad \begin{cases} \rho = -\dfrac{1}{2}\left(\psi_1\overline{\alpha_1}+\psi_2\overline{\alpha_2}+\psi_3\overline{\alpha_3}+\psi_4\overline{\alpha_4}+\omega_1\overline{\beta_1}+\omega_2\overline{\beta_2}+\omega_3\overline{\beta_3}+\omega_4\overline{\beta_4}+\textbf{conjuguée}\right) \\ j_x = \dfrac{c}{2}\left(\psi_1\alpha_4+\psi_2\overline{\alpha_3}+\psi_3\overline{\alpha_2}+\psi_4\overline{\alpha_1}+\omega_1\overline{\beta_4}+\omega_2\overline{\beta_3}+\omega_3\overline{\beta_2}+\omega_4\overline{\beta_1}+\textbf{conjuguée}\right) \\ j_y = \dots\dots\dots\dots \\ j_z = \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

de sorte que pour une solution de la forme (247), on obtient

$$(250)\quad \begin{cases} \rho = -2\left(\psi_1\overline{\psi_1}+\psi_2\overline{\psi_2}+\psi_3\overline{\psi_3}+\psi_4\overline{\psi_4}\right) \\ j_x = 2c\left(\psi_1\overline{\psi_4}+\psi_2\overline{\psi_3}+\psi_3\overline{\psi_2}+\psi_4\overline{\psi_1}\right) \\ \text{etc}\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

qui sont précisément les expressions trouvées par Darwin [1] conformément à la théorie de Dirac.

(1) DARWIN. Proc. Roy. Soc. Série A., vol. 118, nº 780, p. 660, éq. (3. 3).

TABLE DES MATIÈRES

Sur quelques points de la théorie des probabilités

PAR

G. PÓLYA

Les pages qui suivent reproduisent, abstraction faite de quelques altérations, les Leçons que j'ai eu l'honneur de faire à l'Institut Henri Poincaré en mars 1929. Je diviserai ici les matières en deux chapitres. Dans le premier, il s'agit d'une propriété caractéristique de la loi de Gauss et dans le second de quelques autres lois de fréquence. Ces dernières ressemblent à la loi de Gauss en ce qu'elles résultent, elles aussi , de la superposition d'un très grand nombre de petits effets fortuits, mais elles diffèrent de la loi de Gauss en ce que les effets fortuits dont elles résultent ne sont pas indépendants. Dans le premier chapitre, je donnerai les démonstrations en détail. Dans le second je m'efforcerai surtout de présenter les problèmes d'une manière intuitive et, quant aux démonstrations, je me bornerai quelquefois à une indication de la marche à suivre.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici tous mes remerciements à la direction de l'Institut Henri Poincaré et en particulier à M. Emile Borel de l'honneur de leur invitation qui m'a permis d'exposer mes remarques devant un auditoire d'élite.

I. — Sur une propriété caractéristique de la loi de Gauss

I

Envisageons des mesures pour lesquelles la probabilité d'une erreur ne dépend que de la valeur numérique de l'erreur. Désignons par $\varphi(x)$ la loi d'erreurs ; c'est-à-dire que la probabilité qu'une erreur tombe entre les limites a et b est donnée par

$$\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Supposons que n observations indépendantes d'une grandeur physique dont la « vraie valeur » est l ont donné les valeurs

$$l_1, l_2, l_3, \cdots l_n.$$

Les erreurs commises sont $l - l_1$, $l - l_2$, ... $l - l_n$ et la probabilité de les avoir rencontrées ensemble est proportionnelle à

$$\varphi(l - l_1)\,\varphi(l - l_2) \cdots \varphi(l - l_n).$$

En réalité on ne connait pas l et nous devons trouver une valeur plausible de l en connaissant les valeurs $l_1, l_2, \ldots l_n$ fournies par l'observation et en supposant connue la loi d'erreurs $\varphi(x)$. Il est naturel de prendre comme point de départ la distribution de probabilités dont la densité au point x est proportionnelle à

$$(\text{I}) \qquad \varphi(x - l_1)\,\varphi(x - l_2) \cdots \varphi(x - l_n).$$

J'admets que nous étions d'accord jusqu'ici. Mais maintenant il s'agit de nous décider entre plusieurs chemins possibles.

a) On peut choisir comme valeur plausible de la grandeur mesurée *la valeur la plus probable*, c'est-à-dire la valeur $x = l'$ qui rend (I) maximum. C'est le choix fait par GAUSS.

b) On peut aussi choisir *la valeur probable*, c'est-à-dire la valeur l'' déterminée par l'équation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - l'')\,\varphi(x - l_1)\,\varphi(x - l_2) \cdots \varphi(x - l_n)dx = 0.$$

C'est ce que BERTRAND a fait remarquer (1) en critiquant le choix de GAUSS.

c) On pourrait choisir aussi la *valeur médiane*, c'est-à-dire la valeur l''' déterminée par

$$\int_{-\infty}^{l'''} \varphi(x - l_1) \cdots \varphi(x - l_n)dx = \int_{l'''}^{+\infty} \varphi(x - l_1) \cdots \varphi(x - l_n)dx.$$

On pourrait encore choisir les abscisses d'autres points remarquables de la fonction (1), mais arrêtons-nous ici.

POINCARÉ, en critiquant la critique de BERTRAND, a remarqué que les deux chemins *a)* et *b)* mènent au même but, si la loi d'erreurs $\varphi(x)$ est celle de GAUSS (2). C'est une propriété très commode de la loi de GAUSS : elle nous épargne une hésitation pénible.On est ainsi amené à se demander *quelle est la loi d'erreurs la plus générale qui donne*

$$l' = l'',$$

l_1, l_2, ... l_n *étant quelconques* ?

Voilà la question à laquelle je tâcherai de répondre dans ce qui suit (3).

II

Nous demandons de la loi d'erreurs qu'elle nous fournisse le même résultat par le chemin *a)* et par le chemin *b)*, quels que soient les nombres donnés l_1, l_2, ... l_n. C'est une chose bien compliquée, tâchons d'en démêler les postulats essentiels.

Tout d'abord, la méthode *a)* doit être applicable. Nous posons donc comme premier postulat :

(I) *Etant donnés des nombres réels quelconques* l_1, l_2, ... l_n, *la fonction* (1) *atteint son maximum pour une seule valeur de* x.

Considérons maintenant np mesures

$$l_1,\ l_1, \cdots l_1\ ;\ l_2,\ l_2, \cdots l_2\ ;\ \cdots\ l_n,\ l_n, \cdots l_n$$

où chacune des valeurs l_1, l_2, ... l_n est répétée p fois. En cherchant la

(1) J. BERTRAND, Calcul des probabilités, 2e éd. (Paris, 1907). Voir p. 171-172.

(2) H. POINCARÉ, Calcul des probabilités, 2e éd. (Paris, 1912). Voir p. 237-240 et aussi p. 176 et les suivantes.

(3) La réponse est formulée au no VI. J'ai communiqué le résultat au Congrès international de Bologne, le 5 septembre 1928. Voir les Actes de ce Congrès.

valeur plausible pour cette combinaison de mesures, il faut d'après la méthode *a*) chercher le maximum du produit (1) élevé à la *p-me* puissance. La situation de ce maximum *ne dépend pas de p*. Donc le résultat fourni par la méthode *b*) doit être, lui aussi, indépendant de p ; prenons cela comme second postulat :

(II) *Etant donnés des nombres réels quelconques* $l_1, l_2, \ldots l_n$, *l'équation*

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (x - l)\,[\varphi(x - l_1)\,\varphi(x - l_2) \cdots \varphi(x - l_n)]^p dx = 0$$

donne la même valeur pour l *quel que soit l'entier positif* p.

J'ajoute encore les hypothèses supplémentaires que voici :

(I') *L'abcisse du maximum de* $\varphi(x)$ *divise l'axe des* x *en deux parties : dans chacune d'elles* $\varphi(x)$ *est monotone.*

(III) *La fonction* $\varphi(x)$ *possède une dérivée seconde continue,* $\varphi(x) > 0$ *et l'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx$ *existe.*

Le postulat que $\varphi(x)$ ne possède qu'un seul maximum absolu est contenu en (I), comme cas particulier ; (I') demande encore que $\varphi(x)$ ne possède qu'un seul maximum *relatif*. (III) demande en somme une certaine régularité de $\varphi(x)$. Il est bien possible que les postulats (I') et (III) puissent être remplacés par d'autres moins restrictifs sans nuire au résultat final tandis que (I) et (II) me paraissent essentiels.

Notre but est de chercher la fonction $\varphi(x)$ la plus générale satisfaisant à (I), (I'), (II) et (III).

III

J'arrive à deux lemmes dont nous aurons besoin plus tard.

Lemme A. — *Supposons que* $f(x)$ *et* $g(x)$ *soient des fonctions continues, que* $g(\xi) > 0$ *et que* $f(x)$ *atteigne son maximum au point* ξ *et nulle part ailleurs, que* $f(x) \geqq 0$ *et* $f(x)$ *tende vers* 0 *pour* $x \to \pm\infty$ *et enfin que l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\, f(x)dx$$

soit convergente. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x)^n dx} = f(\xi).$$

Ce qui est essentiel dans ce lemme est bien connu. Les hypothèses entraînent l'existence de trois nombres positifs ε, α et β, $\alpha < \beta$, tels que

$$\begin{aligned} f(x) &< f(\xi) - 2\varepsilon \qquad &\text{pour} \qquad &|x-\xi| > \beta, \\ g(x) &> 0 \qquad &\text{pour} \qquad &|x-\xi| < \beta, \\ f(x) &> f(\xi) - \varepsilon \qquad &\text{pour} \qquad &|x-\xi| < \alpha. \end{aligned}$$

On déduit le lemme A de l'inégalité double

$$(f(\xi)-\varepsilon)^n \int_{\xi-\alpha}^{\xi+\alpha} g(x)dx - (f(\xi)-2\varepsilon)^{n-1}\left(\int_{-\infty}^{\xi-\beta} + \int_{\xi+\beta}^{+\infty}\right) |\, g(x)\,|\, f(x)dx$$
$$\leqq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x)^n dx \leqq f(\xi)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |\, g(x)\,|\, f(x)dx.$$

Lemme B. — Admettons que la fonction $f(x)$ est continue, que $0 < f(x) < f(\xi)$ pour $(x-\xi)^2 > 0$ et que $f(x)$ est croissante pour $x < \xi$ et décroissante pour $x > \xi$. Alors on peut conclure de

$$(3) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)^p dx = 0 \qquad \textit{pour} \qquad p = 1, 2, 3, \cdots$$

que $f(x)$ est une fonction paire.

Avant de commencer la démonstration observons que de la seule hypothèse (3) on ne peut pas conclure que $f(-x) = f(x)$ comme le montre l'exemple de la fonction $f(x)$ qui est égale à 1 dans les trois intervalles $(-8, -5)$, $(1, 4)$ et $(5, 7)$ et égale à 0 partout ailleurs : elle satisfait à (3) sans être paire.

L'hypothèse faite sur la forme de la courbe $y = f(x)$ et l'existence de l'intégrale mentionnée dans (3) ($p = 1$ suffit ici) entraînent $f(x) \to 0$ pour $x \to \pm\infty$.

Si l'abscisse ξ mentionnée dans le lemme B n'était pas o, on pourrait déduire du lemme A que le premier membre de (3) a le signe de ξ pour n suffisamment grand, ce qui contredirait l'hypothèse. Donc $\xi = 0$, le maximum de $f(x)$ est $f(0)$.

Soient donnés les nombres y et ε,

$$0 < \varepsilon < y < f(0). \tag{4}$$

Déterminons la fonction $\Psi(t) = \Psi(t\,;\, y,\, \varepsilon)$ en posant

$$t\,\Psi(t\,;\,y,\,\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq y - \varepsilon \\ 1 & \text{pour} \quad y \leqq t \leqq f(0) \end{cases}$$

et en supposant que $t\Psi(t)$ est linéaire pour $y - \varepsilon \leqq t \leqq y$. D'après le théorème de WEIERSTRASS sur l'approximation des fonctions continues on peut déterminer des polynomes $\mathfrak{P}_1(t)$, $\mathfrak{P}_2(t)$, ...

$$\mathfrak{P}_n(t) = a_{n1} + a_{n2}t + a_{n3}t^2 + \cdots + a_{nn}t^{n-1}$$

tels qu'on ait uniformément pour $0 \leqq t \leqq f(0)$.

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{P}_n(t) = \Psi(t). \tag{5}$$

En utilisant l'hypothèse (3) pour $p = 1, 2, \ldots n$ on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, \mathfrak{P}_n\big(f(x)\big) dx \tag{6}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \left\{ a_{n1} f(x) + a_{n2} f(x)^2 + \cdots + a_{nn} f(x)^n \right\} dx = 0.$$

Les polynomes $\mathfrak{P}_n(t)$ étant uniformément bornés pour $0 \leqq t \leqq f(0)$, l'intégrale (6) a une majorante de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\, x \,|\, f(x)\, l\, dx, \tag{7}$$

où l est une constante positive. On conclut ainsi de (5) et de (6) que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, \Psi(f(x)\,;\, y,\, \varepsilon) dx = 0. \tag{8}$$

Cette dernière intégrale est encore majorée par (7) (avec $l = 1$) si on y fait tendre ε vers 0. Désignons par x_1 la plus petite et par x_2 la plus grande racine de l'équation

$$f(x) = y.$$

Ces racines existent d'après (4) et puisque la fonction continue $f(x)$ tend vers 0 quand $x \to \pm \infty$; on voit aussi que

(9) $$x_1 < 0 < x_2.$$

D'après l'hypothèse faite sur la forme de la courbe $y = f(x)$

$$f(x) \geqq y \qquad \text{pour} \qquad x_1 \leqq x \leqq x_2$$

et $f(x) < y$ si x est extérieur à l'intervalle (x_1, x_2). On obtient donc

$$0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, \Psi(f(x)\,; y, \varepsilon) dx = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot 1 \cdot dx = x_2^2 - x_1^2.$$

Tenant compte de (9), nous avons

$$x_1 = - x_2$$

et puisque c'est vrai pour un y quelconque entre 0 et $f(0)$ la fonction $f(x)$ est paire.

IV

Le lemme B étant démontré, retournons à la recherche des fonctions $\varphi(x)$ satisfaisant aux postulats (I), (I'), (II) et (III).

Observons qu'une substitution linéaire opérée sur x est sans influence sur les postulats (I)-(III). En changeant x en $x + a$, où a est une constante facile à déterminer, on peut donc supposer que

(10) $$\int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x) dx = 0.$$

D'après l'hypothèse fondamentale (II), on conclut de (10) que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x)^p dx = 0 \qquad \text{pour} \qquad p = 1, 2, 3, \cdots$$

Ces équations, en nombre infini, entraînent en vertu du lemme B — dont les autres conditions sont remplies d'après (I′) et (III) — que $\varphi(x)$ est paire

$$\varphi(-x) = \varphi(x). \tag{11}$$

Soit donné un nombre c quelconque. Observons qu'en vertu de (11) la fonction

$$\begin{aligned} \varphi(x - c)\,\varphi(x + c) &= \varphi(-x + c)\,\varphi(-x - c) \\ &= \varphi(-x - c)\,\varphi(-x + c) \end{aligned} \tag{12}$$

est paire. Elle n'atteint son maximum qu'une fois, d'après l'hypothèse fondamentale (I), elle doit donc l'atteindre au point $x = 0$. On a ainsi, en faisant usage encore une fois de (11)

$$\varphi(c - x)\,\varphi(c + x) < \varphi(c)^2 \qquad \text{pour} \qquad x^2 > 0. \tag{13}$$

En posant

$$c - x = x_1, \qquad c + x = x_2$$

$$\log \varphi(x) = \Psi(x) \tag{14}$$

et en observant que x et c étant arbitraires x_1 et x_2 le sont aussi, nous pouvons exprimer (13) par

$$\frac{\Psi(x_1) + \Psi(x_2)}{2} < \Psi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \qquad \text{pour} \qquad x_1 \neq x_2. \tag{15}$$

(15) exprime que la courbe $y = \Psi(x)$ est partout *concave vue d'en bas.*

Nous obtenons de (15) que, pour $x_1 \neq x_2$,

$$\frac{1}{2}\left\{\sum_{v=1}^{n} \Psi(x_1 - l_v) + \sum_{v=1}^{n} \Psi(x_2 - l_v)\right\} < \sum_{v=1}^{n} \Psi\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - l_v\right)$$

ce qui exprime que la courbe

$$y = \Psi(x - l_1) + \Psi(x - l_2) + \cdots + \Psi(x - l_n), \tag{16}$$

elle aussi, est partout concave vue d'en bas. En particulier, nous obtenons ainsi, que cette courbe est *croissante à gauche et décroissante à droite de son maximum unique.* Observons que nous savons maintenant davantage que nous n'avons postulé au commencement en posant (I). Nous savons maintenant assez de l'allure de la fonction (1)

pour rendre applicable le lemme B à l'équation (2) valable pour $p = 1, 2, 3, \ldots$ Nous obtenons que la fonction (1) est une fonction paire de $(x - l)$.

En somme, nous avons obtenu la propriété suivante des fonctions $\varphi(x)$ satisfaisant aux postulats (I), (I′), (II) et (III) : *Etant donnés des nombres réels quelconques $l_1, l_2, \ldots l_n$ il existe un nombre l, tel que $\varphi(x - l_1)\ \varphi(x - l_2) \ldots \varphi(x - l_n)$ soit une fonction paire de $(x - l)$ et une fonction décroissante de $(x - l)^2$.*

Si une loi d'erreurs $\varphi(x)$ jouit de cette propriété et $l_1, l_2, \ldots l_n$ sont des mesures, elle fournit évidemment la même valeur avec les deux méthodes *a*) et *b*) expliquées au nº 1 : la courbe $y = \varphi(x - l_1) \ldots \varphi(x - l_n)$ est symétrique par rapport à l'axe vertical $x = l$ qui contient aussi bien son maximum unique que son centre de gravité. Maintenant nous pouvons être assurés que les postulats (I), (II), (I′) et (III) embrassent toute la question du nº 1, ce qui n'était pas évident *à priori*.

Il y a plus. Une loi d'erreurs $\varphi(x)$ jouissant de la dite propriété de symétrie fournira la même valeur aussi avec la méthode *c*) ou avec toute autre méthode raisonnable.

Les déductions suivantes qui sont encore nécessaires pour déterminer la forme des fonctions $\varphi(x)$ cherchées s'appuyeront sur la propriété de symétrie que nous venons d'établir.

V

Jusqu'ici nous n'avons pas fait usage de la première partie de l'hypothèse (III) concernant les dérivées de $\varphi(x)$. Il serait désirable de continuer le raisonnement sans faire appel à ces dérivées ; cela conviendrait mieux au caractère approximatif de la théorie des probabilités qu'on ne devrait pas perdre des yeux en faisant des déductions, comme M. BOREL a si justement fait remarquer. Toutefois nous ferons usage des dérivées de $\varphi(x)$ dans ce qui suit, parce que c'est plus commode.

Occupons-nous de la fonction

$$\Psi(x) = \log \varphi(x).$$

En vertu des hypothèses réunies sous (III), $\Psi'(x)$ et $\Psi''(x)$ existent et sont continues. L'inégalité (15) entraîne, comme on voit facilement, que $\Psi'(x)$ est une fonction décroissante au sens stricte, le cas où $\Psi'(x)$

est constante dans un intervalle est exclu comme le signe d'égalité dans (15). On conclut de (11), (14) que

$$(17) \qquad \Psi'(-x) = -\Psi'(x)$$

et puis, $\Psi'(x)$ étant strictement monotone,

$$(18) \qquad \Psi'(x) < 0 \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

Soient donnés un nombre positif y et un entier m supérieur à 1. Considérons la fonction de x

$$\Psi'(-y) + m\Psi'(x) = h(x).$$

En vertu de (17) et de (18)

$$h(0) = \Psi'(-y) > 0, \qquad h(y) = (m-1)\Psi'(y) < 0.$$

Donc il existe un η

$$0 < \eta < y$$

tel que $h(\eta) = 0$; donc

$$(19) \qquad \Psi'(-y) + m\Psi'(\eta) = 0.$$

C'est-à-dire que la dérivée de la fonction de x

$$(20) \qquad \varphi(x-y)\,\varphi(x+\eta)^m$$

s'annule pour $x = 0$. Mais puisque $\Psi'(x)$ est strictement monotone, la dérivée de (20) ne peut s'annuler qu'une fois. L'abscisse $x = 0$ est donc pour la fonction (20) l'abscisse de symétrie dont l'existence a été établie au nº IV, la fonction (20) est paire. On a donc en faisant usage de (11)

$$(21) \qquad \begin{aligned} \varphi(x-y)\,\varphi(x+\eta)^m &= \varphi(-x-y)\,\varphi(-x+\eta)^m \\ &= \varphi(x+y)\,\varphi(x-\eta)^m. \end{aligned}$$

En éliminant m entre (19) et (21) et en utilisant (17) on obtient

$$\frac{\Psi'(y)}{\Psi'(\eta)} \log \frac{\varphi(x+\eta)}{\varphi(x-\eta)} = \log \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x-y)}$$

ce qu'on peut écrire

$$(22) \qquad 2\Psi'(y)\,\frac{\Psi(x+\eta) - \Psi(x-\eta)}{2\eta} = [\Psi(x+y) - \Psi(x-y)]\,\frac{\Psi'(\eta)}{\eta}.$$

Regardons y comme constante et faisons tendre l'entier m vers ∞.

On conclut de (19) d'abord que $\Psi'(\eta) \to 0$, puis, $\Psi'(x)$ étant strictement monotone, que $\eta \to 0$. En définitive (22) nous fournit pour $m \to \infty$

$$2\Psi'(x)\,\Psi'(y) = [\Psi(x+y) - \Psi(x-y)]\Psi''(0). \tag{23}$$

En différentiant (23) par rapport à x et à y nous obtenons

$$2\Psi''(x)\,\Psi''(y) = [\Psi''(x+y) + \Psi''(x-y)]\Psi''(0). \tag{24}$$

Observons que $\Psi''(0) = 0$ est exclu par (23) puisque $\Psi'(x)$ ne s'annule pas identiquement. En posant

$$\frac{\Psi''(x)}{\Psi''(0)} = f(x) \tag{25}$$

nous obtenons finalement

$$2f(x)\,f(y) = f(x+y) + f(x-y). \tag{26}$$

C'est une des équations fonctionnelles classiques traitées par CAUCHY (4). Observons qu'en vertu de l'hypothèse (III) la fonction $f(x)$ donnée par (25) est continue ; elle est paire, voir (17), et se réduit à 1 pour $x = 0$. Dans ces conditions la solution ne peut avoir d'après CAUCHY qu'une des trois formes suivantes :

$$\frac{\Psi''(x)}{\Psi''(0)} = f(x) = \begin{cases} 1 \\ \cosh bx = \frac{1}{2}(e^{bx} + e^{-bx}) \\ \cos bx \end{cases} \tag{27}$$

b étant une certaine constante positive. La troisième forme, $\cos bx$ est exclue par (17) et (18), la première n'est qu'un cas limite de la seconde, pour $b \to 0$. En observant que $\Psi''(0)$ doit être négative et $\Psi'(x)$ impaire, voir (17), (18), on obtient par deux intégrations

$$\Psi(x) = \frac{c}{b^2}[1 - \cosh(bx)] + \log d, \tag{28}$$

ce qui contient comme cas limite $(b \to 0)$

$$\Psi(x) = -\frac{cx^2}{2} + \log d\,; \tag{28*}$$

(4) A. L. CAUCHY, Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique (Paris 1821). Voir p. 114-122.

b, c, d sont des constantes positives. En appliquant la transformation opérée au commencement du nº IV dans la direction inverse on trouve la forme définitive de $\varphi(x)$.

VI

Voici le résultat :

Chaque fonction $\varphi(x)$ *satisfaisant aux postulats* (I), (I′), (II) *et* (III) *est nécessairement d'une des deux formes suivantes*

$$\varphi(x) = de^{cb^{-2}[1 - \cosh b(x - a)]} \tag{29}$$

$$\varphi(x) = de^{-\frac{c(x-a)^2}{2}} \tag{29*}$$

b, c, d étant des constantes positives et a une constante réelle quelconque ; (29*) *est le cas limite de* (29) *pour $b \to 0$.*

On peut ajouter qu'inversement *a, b, c étant donnés, $b > 0$, $c > 0$, a quelconque, on peut déterminer d de manière que $\varphi(x)$, donnée par* (29) *ou* (29*) *soit une loi d'erreur. Cette loi d'erreur fournira la même valeur pour la grandeur mesurée avec les trois méthodes a), b), c) expliquées au nº* I, *quelles que soient les mesures.*

En effet, $\varphi(x)$ étant positive, pour qu'elle puisse être admise comme loi d'erreur elle doit encore satisfaire à la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$$

ce qui n'exige qu'un choix convenable de d.

Puis, l_1, l_2, ... l_n étant donnés, l'équation en l

$$\sinh b(l - l_1) + \sinh b(l - l_2) + \cdots + \sinh b(l - l_n) = 0 \tag{30}$$

aura une unique racine réelle, vu que la fonction

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

est strictement monotone et varie de $-\infty$ à $+\infty$ avec x. (On peut même dire que la racine l sera comprise entre le plus petit et le plus grand

des nombres $l_1, l_2, \ldots l_n$.) $\Psi(x)$ étant donnée par (28) — je prends, ce qui est sans importance, $a = 0$ dans (29) — on a, en vertu de (30)

$$\sum_{v=1}^{n} \Psi(x - l_v) - n(cb^{-2} + \log d)$$

$$= - cb^{-2} \sum_{v=1}^{n} [\cosh b(x - l) \cosh b(l - l_v) + \sinh b(x - l) \sinh b(l - l_v)]$$

$$= - cb^{-2} \cosh b(x - l) \sum_{v=1}^{n} \cosh b(l - l_v).$$

C'est bien une fonction paire de $(x - l)$ et une fonction décroissante de $(x - l)^2$.

On peut vérifier encore plus facilement que la fonction (29*) possède la même propriété de symétrie ; dans ce cas-là, même

$$\varphi\big(a_1(x - l_1)\big)\, \varphi\big(a_2(x - l_2)\big) \cdots \varphi\big(a_n(x - l_n)\big)$$

est une fonction paire de $(x - l^*)$; $a_1, a_2, \ldots a_n, l_1, l_2, \ldots l_n$ étant quelconques et l^* étant choisi convenablement. (Cette propriété caractérise d'ailleurs complètement (29*) puisqu'elle ne convient pas à (29) ; cela a une certaine importance quand on envisage des mesures qui n'ont pas toutes la même précision.)

En somme nous avons complètement déterminé les lois d'erreur qui mènent au même résultat avec les deux méthodes *a*) et *b*). Elles forment la famille de courbes (29) à 3 paramètres, contenant la courbe de GAUSS (29*) qui ne dépend que de 2 paramètres. En supposant (10) c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'erreur constante, on obtient $a = 0$, donc le nombre des paramètres se réduit d'une unité.

VII

Je vais ajouter quelques remarques sur la loi d'erreurs cyclique, dont la notion est due à M. VON MISES [5]. Je n'ai pas à examiner ici si cette loi est applicable ou non au problème certainement passionnant de la « Ganzzahligkeit » (problème des valeurs entières tirées de l'observation) que son auteur a en vue ; je m'occuperai d'elle comme

(5) Physikalische Zeitschrift (1919), p. 490-500.

d'une notion mathématique apte à éclaircir par analogie les questions correspondantes sur la loi d'erreurs ordinaire.

Admettons qu'en mesurant des angles la probabilité d'une erreur ne dépend que de sa valeur numérique. (Les « angles » sont des valeurs réelles quelconques envisagées mod. 2π.) Comme loi d'erreurs cyclique je désignerai une fonction $\varphi(x)$ telle que la probabilité qu'une erreur tombe entre les limites α et β est

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)dx \qquad (\alpha < \beta \leqq \alpha + 2\pi).$$

On doit avoir

$$(31) \qquad \varphi(x + 2\pi) = \varphi(x), \qquad \varphi(x) \geqq 0, \qquad \int_{0}^{2\pi} \varphi(x)dx = 1.$$

Si n observations indépendantes d'un angle dont la vraie valeur est λ ont donné les mesures $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, la probabilité de les avoir rencontrées ensemble est proportionnelle à

$$\varphi(\lambda - \lambda_1)\, \varphi(\lambda - \lambda_2) \cdots \varphi(\lambda - \lambda_n).$$

Si on ne connait pas la vraie valeur de l'angle mesuré, seulement les mesures $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ fournies par l'observation et la loi d'erreurs $\varphi(x)$, on peut se proposer de former une conjecture plausible sur la vraie valeur. Mais ici surgit une nouvelle difficulté, inhérente au nouveau problème. Il y a évidemment des cas où on ne peut pas former une conjecture raisonnable, comme par exemple lorsque λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_n$ désignent les directions de n rayons d'un cercle qui sont dirigés vers les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit au cercle. Il faut éviter de demander trop. Bornons-nous au cas où *les mesures couvrent moins qu'un demi-cercle*, donc où on a

$$(32) \qquad \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n < \lambda_1 + \pi.$$

Nous n'exigeons des méthodes suivantes un résultat déterminé que dans le cas (32).

Il est naturel d'envisager la distribution de probabilités sur le cercle unité dont la densité au point x est

$$(33) \qquad \varphi(x - \lambda_1)\, \varphi(x - \lambda_2) \cdots \varphi(x - \lambda_n).$$

(Le rayon passant par le « point x » forme l'angle x avec une direction donnée). On peut proposer deux méthodes.

a) On prend comme valeur plausible de l'angle cherché la valeur qui rend (33) maximum. C'est la méthode proposée par M. von Mises, analogue à celle de Gauss.

b) On cherche le centre de gravité d'une masse, répartie le long du cercle unité dont la densité au point x est (33) et on détermine l'angle cherché par le rayon qui passe par ce centre de gravité. Cela revient à prendre comme valeur plausible de l'angle cherché celle des deux valeurs λ satisfaisant à l'équation

$$\int_0^{2\pi} \sin(x - \lambda)\, \varphi(x - \lambda_1)\, \varphi(x - \lambda_2) \cdots \varphi(x - \lambda_n) dx = 0$$

qui est située dans le *plus petit* des deux arcs déterminés par λ_1 et λ_n ; n'oublions pas que nous avons supposé (32). Cette méthode n'était pas proposée par M. von Mises mais est suggérée par ses considérations.

Nous avons un problème analogue à celui du n° I si nous cherchons les *lois d'erreurs cycliques pour lesquelles les méthodes a) et b) mènent nécessairement au même résultat*. Il sera suffisant d'esquisser la marche générale du raisonnement.

Comme au n° II, nous pouvons détacher les 2 postulats suivants :

(I). Quels que soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ satisfaisant à (32), la fonction (33) n'a qu'un maximum absolu entre 0 et 2π.

(II). Quels que soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$, satisfaisant à (32), la solution de l'équation en λ

$$\int_0^{2\pi} \sin(x - \lambda) [\varphi(x - \lambda_1)\, \varphi(x - \lambda_2) \cdots \varphi(x - \lambda_n)]^p dx = 0$$

est indépendante de p, $p = 1, 2, 3, \dots$

Pour pouvoir appliquer les méthodes des n°s III-V j'ai dû en outre faire les hypothèses supplémentaires suivantes :

(I''). La fonction (33) n'admet qu'un maximum *relatif* entre 0 et 2π, c'est-à-dire qu'elle est monotone entre son minimum et son maximum, les deux étant univoquement déterminés mod. 2π.

(III). Les dérivées $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ existent et sont continues : $\varphi(x) > 0$.

Avec des modifications faciles, les raisonnements des n°s III-V mènent à l'équation fonctionnelle (26) dont il faudra maintenant prendre la troisième solution, inutilisable pour le problème précédent (voir (27)). Plus précisément, vu le postulat (I) et la périodicité exigée par (31), il faudra la prendre avec $b = 1$. D'où on obtient la loi d'erreurs cyclique

$$\varphi(x) = de^{c \cos x} \tag{34}$$

C'est la loi qui a été déduite par M. VON MISES *l. c.* d'un postulat différent, analogue au postulat dont GAUSS a déduit sa loi. Il me paraît intéressant que cette loi cyclique (34) conserve avec la loi de GAUSS une analogie aussi au point de vue de la comparaison des méthodes *a*) et *b*).

Beaucoup plus loin l'analogie n'ira pas, me semble-t-il. En cherchant une loi d'erreurs cyclique qui provient de la superposition d'une multitude de petites erreurs indépendantes, on doit arriver à la loi de GAUSS « enroulée autour du cercle » ; c'est la loi

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{2c}}$$

représentée, ce qui est assez curieux, par une série théta.

II. — Sur quelques courbes de fréquence résultant de la superposition d'effets fortuits interdépendants

I

La situation privilégiée de la courbe de GAUSS dans la statistique mathématique s'explique par deux raisons, l'une expérimentale et l'autre théorique. L'expérience nous montre que, dans des domaines très divers, il y a des courbes statistiques qui, avec une approximation raisonnable, peuvent être assimilées à la courbe de GAUSS. La théorie nous apprend que c'est la courbe de GAUSS qui doit résulter de la superposition d'un très grand nombre de petits effets fortuits indépendants. La constatation théorique élucide le fait expérimental ; plusieurs grandeurs dont la statistique nous est familière, comme les erreurs d'observation, les dimensions des organes des êtres vivants, etc., subissent des modifications dues à l'action d'une multitude de petites

causes incontrôlables qu'on peut raisonnablement considérer comme « dues au hasard ».

Mais dans tous les domaines d'application on rencontre aussi des courbes statistiques qui s'écartent considérablement de la courbe de GAUSS et une tâche très importante de la théorie est de chercher d'autres courbes théoriques, auxquelles les courbes expérimentales pourraient être raisonnablement assimilées. Ce problème paraît, par sa nature, indéterminé. On connaît les travaux de PEARSON, BRUNS, CHARLIER, KAPTEYN et d'autres qui en présentent des solutions très différentes, chaque solution généralisant la courbe de GAUSS dans une autre direction.

Il me paraît qu'il ne faut pas considérer ce problème d'une manière formelle et chercher des familles de courbes quelconques qui se déduisent de la courbe de GAUSS par une opération analytique quelconque ou partagent avec la courbe de GAUSS une propriété analytique quelconque. Ce qu'il faudrait élargir c'est la base théorique de la courbe de GAUSS et c'est le chemin suivant qui semble se présenter le plus naturellement. Gardons la conception fondamentale que la courbe théorique cherchée résulte de la sommation d'un très grand nombre d'effets dûs au hasard, mais *abandonnons l'hypothèse supplémentaire* que ces effets sont *indépendants*. Le problème mathématique qui s'impose de cette façon peut être formulé ainsi : étudier les lois limites provenant de la somme d'un grand nombre de variables aléatoires interdépendantes.

C'est ce problème vaste, trop vaste peut-être, que j'entreprendrai d'éclaircir par quelques exemples choisis avec soin. Ils nous feront entrevoir quelques conclusions générales et nous mèneront à quelques lois limites de fréquences, qui ne seront pas simplement des formules commodes pour l'interpolation, mais des formules susceptibles d'interprétation.

II

Considérons une suite de variables aléatoires (6)

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \cdots \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}, \cdots$$

et concevons-les comme réalisées par des expériences successives,

(6) Les variables aléatoires seront désignées par des caractères gras.

x_1 faisant le commencement et x_{n+1} venant après x_n. Le cas général d'interdépendance consiste en ceci que *les chances de* x_{n+1} *sont déterminées par l'ensemble des valeurs que les expériences précédentes ont attribuées à* $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Un cas particulier important est celui où les chances de x_{n+1} ne dépendent que de la somme $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, deux combinaisons $x_1, x_2, \ldots x_n$ de même somme donnant les mêmes chances pour x_{n+1}. Dans ce cas-ci je parlerai d'*influence globale.*

Un autre cas particulier important est celui où les chances de x_{n+1} ne dépendent que de x_n, deux combinaisons $x_1, x_2, \ldots x_n$ avec la même valeur de x_n donnant les mêmes chances pour x_{n+1}. Dans ce cas-là je parlerai de l'*influence du prédécesseur*. Ce cas a été introduit par A. MARKOFF qui en a fait une étude approfondie sous le nom d'*épreuves liées en chaîne* (7).

On dit que les variables aléatoires $x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1}, \ldots$ sont *indépendantes*, si les chances de x_{n+1} ne dépendent pas du tout du résultat des épreuves précédentes, deux combinaisons quelconques $x_1, x_2, \ldots x_n$ donnant les mêmes chances pour x_{n+1}.

L'interdépendance des variables aléatoires quelconques $x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1}, \ldots$ consiste en ceci que les chances de x_n sont modifiées si on fixe les valeurs d'autres variables $x_j, x_k, \ldots x_p, x_q, \ldots$ qui peuvent en partie précéder x_n et en partie la suivre. La distinction faite entre influence générale, influence globale, influence du prédécesseur et indépendance a été basée sur la considération des chances de x_{n+1} quand toutes les variables précédentes $x_1, x_2, \ldots x_n$ sont fixées et aucune des variables suivantes $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ ne l'est. Il est encore important de considérer les chances de x_n lorsqu'aucune variable n'est fixée, ni x_1, ni $x_2, \ldots$ ni $x_{n+1}, \ldots$, les chances de x_n « avant la première épreuve » que je nommerai les chances *à priori* de x_n. (Une confusion avec la signification demi-philosophique du terme « probabilité *à priori* » me semble facile à éviter.) Si les variables aléatoires $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sont indépendantes, les chances de x_n après la fixation des valeurs d'autres variables quelconques $x_j, x_k, \ldots x_p, x_q, \ldots$ sont égales à ses chances *à priori*.

(7) A. A. MARKOFF : *a*) Wahrscheinlichkeitsrechnung (Leipzig-Berlin, 1912), p. 272-298 ; *b*) Supplément à la 3e édition russe de l'ouvrage précité ; traduction française parue séparément (St.-Pétersbourg, 1913), p. 44-66.

Je dirai que la suite $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ est *homogène* si les chances *à priori* de toutes les variables sont les mêmes.

Les variables $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ peuvent varier d'une manière continue ou discontinue, elles peuvent aussi être des vecteurs dans un espace d'un nombre quelconque de dimensions.

Nous avons le cas le plus simple, lorsque chaque épreuve ne présente qu'une alternative, c'est-à-dire lorsque x_n n'est susceptible que de deux valeurs différentes, disons de 0 et de 1 ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Dans ce cas je parlerai d'épreuves ou de variables *alternatives*.

Le cas le plus simple, le plus classique et aussi le plus important, est celui où les épreuves sont à la fois alternatives, homogènes et indépendantes. Chaque épreuve devant présenter une alternative, chacune la même alternative, avec des chances indépendantes du résultat des autres, l'épreuve en question peut être représentée par un tirage d'une urne qui ne contient que deux espèces de boules, disons rouges et noires, l'urne présentant à tous les tirages la même composition. Il s'agit donc de tirages réitérés d'une urne dont on maintient la composition constante, en remettant chaque fois la boule tirée. La suite de tirages ne dépend que d'un paramètre, de la probabilité de tirer rouge de l'urne en question que nous désignerons par ρ. C'est le schéma d'urnes le plus classique à propos duquel Jacques Bernoulli a trouvé son théorème et de Moivre a rencontré la loi de fréquences qu'on nomme généralement la loi de Gauss.

C'est le schéma d'urne que je veux modifier essentiellement, mais aussi simplement que possible. Je considérerai des épreuves alternatives, homogènes mais non-indépendantes et je fixerai le degré d'interdépendance par un seul paramètre, qui s'ajoutera au paramètre ρ, probabilité *à priori* de tirer rouge, la même pour toutes les épreuves. On pourrait ajouter ce second paramètre d'une infinité de manières, mais je ne considérerai que deux structures d'interdépendance, essentiellement différentes : je prendrai un exemple de l'influence globale et un autre de l'influence du prédécesseur.

III

Un phénomène familier où il s'agit d'une influence globale (avec des à peu près inévitables en statistique) est le progrès d'une épidémie. Nous jugeons les chances d'éviter l'épidémie surtout d'après le *chiffre*

total des cas de maladie ou de mort. Le fait élémentaire dans le progrès d'une épidémie est la production des germes ; celui qui tombe malade produit de nouveaux germes, en nombre beaucoup supérieur et augmente par cela les chances de son entourage de tomber malade. En réduisant ce fait à son expression la plus simple et en y ajoutant une certaine symétrie, propice au traitement mathématique, nous sommes amenés au schéma d'urnes suivant :

Une urne contient originalement N boules, dont R sont rouges et S noires, $R + S = N$. Nous faisons de l'urne des tirages successifs en ajoutant à l'urne, après chaque tirage, à la place de la boule tirée $1 + \Delta$ boules *de la même couleur*. Si Δ est positif, le nombre des boules augmente après chaque tirage, chaque succès obtenu favorise les chances des succès à obtenir, chaque insuccès gâte encore les chances des épreuves suivantes, le succès ainsi que l'insuccès sont *contagieux*. Ajouter un nombre négatif signifie enlever ; donc si Δ est négatif, le nombre des boules diminue au cours des tirages, chaque succès obtenu diminue les chances de succès ultérieurs ; mais aussi les insuccès sont de la même nature et chaque coup tend à amener un revirement de fortune. Si $\Delta = 0$, les épreuves sont indépendantes ; c'est le cas classique de la boule remise. Le cas $\Delta = -1$, celui de la boule non-remise est aussi classique.

Associons aux tirages successifs les variables aléatoires $x_1, x_2, x_3, \ldots$ le premier tirage correspondant à x_1, le second à x_2, etc. Soit $x_n = 1$ si le tirage correspondant fait sortir une boule rouge et soit $x_n = 0$ s'il fait sortir une noire.

Après n tirages l'urne contiendra un nombre total de $N + n\Delta$ boules, dont $R + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\Delta$ rouges. La probabilité de tirer une boule rouge au $(n + 1)$-*me* tirage est donc

$$(1) \qquad \frac{R + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\Delta}{N + n\Delta} = \frac{\rho + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\delta}{1 + n\delta}.$$

Je pose ici comme dans ce qui suit

$$(2) \qquad \rho = \frac{R}{N}, \qquad \sigma = \frac{S}{N} = 1 - \rho, \qquad \delta = \frac{\Delta}{N}.$$

(1) est la probabilité de l'équation $x_{n+1} = 1$. Elle ne dépend que de la somme $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ des variables aléatoires précédentes ; c'est bien le cas de l'influence globale.

La probabilité (1) contient deux paramètres, ρ et δ ; ρ est la pro-

babilité *à priori* de l'équation $x_1 = 1$, δ exprime par son signe la direction et par sa valeur absolue l'intensité de l'interdépendance. On peut attribuer à ρ une valeur quelconque de l'intervalle $0 < \rho < 1$. Étant donné ρ, si la série comprend n tirages, δ doit satisfaire à la condition

$$(3) \qquad \rho + (n - 1)\delta \geqq 0 ;$$

le premier membre est le numérateur de la probabilité d'avoir $x_n = 1$ après $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1$. La condition (3) est l'unique à laquelle δ doit satisfaire pourvu que $\rho \leqq \sigma$.

La structure d'interdépendance que je viens d'expliquer et qui peut être caractérisée soit par le schéma d'urnes considéré, soit par la formule (1), sera nommée brièvement la structure de la « contagion » (8).

IV

Le cas le plus simple de l'influence du prédécesseur est représenté par le schéma d'urnes suivant.

Pour faire une série de tirages, on dispose de trois urnes, $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_\rho$, $\mathfrak{U}_\sigma$ chacune contenant des boules rouges et noires. De l'urne $\mathfrak{U}_1$ on ne fait qu'un tirage, le premier de la série. Si la boule sortie au *n-me* tirage était rouge, le $(n + 1)$*-me* tirage se fera de $\mathfrak{U}_\rho$, si elle était noire, il se fera de $\mathfrak{U}_\sigma$. On maintient constante la composition de $\mathfrak{U}_\rho$ ainsi que celle de $\mathfrak{U}_\sigma$ en remettant chaque fois la boule puisée. Les probabilités sont données par le tableau suivant :

urne	$\mathfrak{U}_1$	$\mathfrak{U}_\rho$	$\mathfrak{U}_\sigma$
probabilité de boule rouge	ρ_1	ρ_ρ	ρ_σ
probabilité de boule noire	σ_1	σ_ρ	σ_σ.

Donc ρ_ρ est la probabilité du « rouge après rouge », σ_ρ du « noir après rouge », etc. On a

$$(4) \qquad \rho_1 + \sigma_1 = 1, \qquad \rho_\rho + \sigma_\rho = 1, \qquad \rho_\sigma + \sigma_\sigma = 1.$$

(8) Voir F. EGGENBERGER et G. PÓLYA : *a*) Zeitschrift f. angewandte Mathematik u. Mechanik, t. III (1923), p. 279-289 ; *b*) Comptes-rendus, t. 187 (1928), p. 870-872 ; F. EGGENBERGER, Thèse, Zurich, 1924 ; A. A. MARKOFF, Bulletin de l'Académie Imp. des Sciences, Pétrograd (1917) p. 177-186 (M. Serge BERNSTEIN a eu l'amabilité de me signaler cet ouvrage écrit en russe). Essentiellement la même structure de probabilité a été envisagée par Léon BRILLOUIN en connection avec un problème de la théorie des quanta, Annales de Physique, t. 7 (1927), p. 315-331.

Associons aux tirages successifs les variables aléatoires x_1, x_2, x_3, ... de la même manière qu'au n° III. La probabilité que la boule sortie au $(n + 1)$-*me* tirage soit rouge ou, ce qui est la même chose, la probabilité d'avoir $x_{n+1} = 1$ est donnée par

(5) $$\rho_\sigma + (\rho_\rho - \rho_\sigma)x_n = \rho_\sigma + \tau x_n$$

où j'ai posé

(6) $$\tau = \rho_\rho - \rho_\sigma = \sigma_\sigma - \sigma_\rho = \begin{vmatrix} \rho_\rho & \sigma_\rho \\ \rho_\sigma & \sigma_\sigma \end{vmatrix}$$

La probabilité (5) ne dépend que de x_n ; c'est bien le cas de l'influence du prédécesseur.

Si τ est positif, la structure des tirages favorise la *ressemblance* de chaque épreuve à la précédente ; elle favorise la *dissemblance* si τ est négatif. Dans le premier cas, la valeur absolue de τ exprime la force de la « tradition », dans le second la force de l' « opposition ».

Un exemple aussi simple qu'ingénieux de cette structure d'interdépendance est due à MARKOFF lui-même [9]. Il est familier à tout le monde : c'est un texte quelconque dans lequel les lettres, consonnes et voyelles, se suivent. Entendons par ρ_ρ, ρ_σ, σ_ρ, σ_σ les quatre probabilités suivantes déterminées expérimentalement par dénombrement direct : « consonne après consonne », « consonne après voyelle », « voyelle après consonne », « voyelle après voyelle ». Nous aurons un τ négatif, donc le cas de la dissemblance et le schéma d'urnes expliqué correspondra approximativement aux faits observables [10]. On pourrait penser que le cas de τ positif, celui de la ressemblance, se trouve réalisé dans une longue lignée de descendants successifs. Les dispositions sont transmises de père en fils ; les influences ancestrales de prédécesseurs très éloignés peuvent se faire sentir, mais seulement indirectement, par l'intermédiaire du *prédécesseur immédiat* [11]. Quoiqu'il en soit, simplement pour avoir une expression brève, je parlerai du cas discuté des épreuves liées en chaîne, caractérisée par (5), comme de la structure de l' « hérédité ».

(9) Voir l. c. 7) b) p. 56-66.

(10) Mais seulement approximativement : la $(n - 1)$-*me* lettre semble exercer sur la $(n + 1)$-*me* une influence *directe* non négligeable bien que moins forte que celle qu'elle exerce indirectement par l'intermédiaire de la n-*me* ; et il y a encore la $(n - 2)$-*me* lettre, etc. Voir les résultats expérimentaux de MARKOFF *l. c.*

(11) Cette idée a été émise, sous une forme plus précise par Serge BERNSTEIN, Mathematische Annalen, t. 97 (1926), p. 1-59, voir p. 40-41.

V

Je vais calculer quelques espérances mathématiques, utiles à l'étude de la structure de la « contagion ». Ce calcul sera des plus simples si nous nous appuyons sur le fait suivant :

La structure de la « contagion » est homogène, c'est-à-dire que toutes les variables aléatoires $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$ *ont les mêmes probabilités à priori. Outre cela, l'interdépendance entre deux variables quelconques* x_k *et* x_l *est la même.*

Cela est plausible puisque la probabilité (1) est une fonction symétrique des variables qui précèdent x_{n+1}, mais cela ne va pas de soi. Le résultat énoncé contient une propriété importante de la structure de la contagion qui sera démontrée sous une forme un peu plus générale au nº VII et dont je ferai usage dès maintenant.

Valeur probable de x_n. L'espérance mathématique de x_n pour n quelconque est la même que celle de x_1, à cause de l'homogénéité. x_1 ne prend que deux valeurs, 1 et 0, avec la probabilité ρ et σ respectivement ; on a donc [12]

$$\mathrm{E}x_n = \mathrm{E}x_1 = \rho \cdot 1 + \sigma \cdot 0 = \rho. \tag{7}$$

Ecart de x_n. Le carré de l'écart moyen quadratique de x_n est, lui aussi, indépendant de n. On a

$$\mathrm{E}(x_n - \rho)^2 = \mathrm{E}(x_1 - \rho)^2 = \rho(1 - \rho)^2 + \sigma(0 - \rho)^2 = \rho\sigma. \tag{8}$$

Coefficient de corrélation de x_k *et* x_l. Il suffit de calculer, d'après le principe avancé, le coefficient de corrélation de x_1 et de x_2, celui de x_k et x_l étant le même. Commençons par calculer la probabilité d'avoir les deux équations simultanées

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 1,$$

c'est-à-dire que les deux premiers tirages donnent rouge. La probabilité d'avoir $x_1 = 1$ est ρ. Etant donné $x_1 = 1$, la probabilité d'avoir $x_2 = 1$ est, d'après (1), $\frac{\rho + \delta}{1 + \delta}$. La probabilité cherchée est la probabilité composée

$$\rho \cdot \frac{\rho + \delta}{1 + \delta}.$$

(12) E désigne l'espérance mathématique.

En calculant de la même manière encore trois probabilités analogues, on obtient la table de corrélation de x_1 et de x_2

$x_2 \backslash x_1$	I	0
I	$\frac{\rho(\rho+\delta)}{1+\delta}$	$\frac{\rho\sigma}{1+\delta}$
0	$\frac{\sigma\rho}{1+\delta}$	$\frac{\sigma(\sigma+\delta)}{1+\delta}$

Observons en passant que cette table est symétrique par rapport à sa diagonale principale, donc x_2 *dépend de la même manière de* x_1 *que* x_1 *de* x_2. En l'utilisant on trouve

$$(9)\quad E(x_1-\rho)(x_2-\rho)=\frac{\rho(\rho+\delta)}{1+\delta}(1-\rho)(1-\rho)+\frac{\rho\sigma}{1+\delta}(0-\rho)(1-\rho)+\cdots$$
$$=\frac{\rho\sigma\delta}{1+\delta}=E(x_k-\rho)(x_l-\rho).$$

Le coefficient de corrélation entre x_k et x_l est, en vertu de (8) et de (9),

$$(10)\qquad \frac{E(x_k-\rho)(x_l-\rho)}{\sqrt{E(x_k-\rho)^2\,E(x_l-\rho)^2}}=\frac{\delta}{1+\delta};$$

il a le signe de δ et il croît avec δ, s'approchant de l'unité quand δ est positif et très grand, c'est-à-dire lorsque la contagion est forte.

Valeur probable de $r = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. — La variable aléatoire r est le nombre, sujet au hasard, des boules rouges sorties aux n premiers tirages. Sa valeur probable est

$$(11)\qquad Er=Ex_1+Ex_2+\cdots+Ex_n=n\rho$$

en vertu de (7).

Ecart de r. — On obtient son carré, en utilisant (8) et (9)

$$(12)\qquad E(r-n\rho)^2=E(x_1-\rho+x_2-\rho+\cdots+x_n-\rho)^2$$
$$=nE(x_1-\rho)^2+n(n-1)\,E(x_1-\rho)(x_2-\rho)$$
$$=n\rho\sigma\left(1+\frac{(n-1)\delta}{1+\delta}\right).$$

Coefficient de dispersion. — On obtient le carré de ce coefficient (qui sera comme d'usage, désigné par Q) en divisant $E(r-n\rho)^2$ par $n\rho\sigma$, ce qui serait la valeur de (12) si x_1, x_2, ... x_n étaient indé-

pendants. Donc

$$(13) \qquad Q^2 = \frac{1 + n\delta}{1 + \delta}.$$

On a $Q > 1$ ou $Q < 1$ selon que $\delta > 0$ ou $\delta < 0$. C'est-à-dire que la dispersion est hypernormale ou hyponormale selon que les chances augmentent ou diminuent avec le succès. Cela se comprend.

VI

La structure de l' « hérédité », telle qu'elle a été définie au nº IV, n'est pas nécessairement homogène. Désignons par ρ_k la probabilité *à priori* (voir nº II) d'avoir $x_k = 1$ et par σ_k celle d'avoir $x_k = 0$. On a

$$(14) \qquad \rho_k + \sigma_k = 1.$$

Cherchons la relation entre ρ_k et ρ_{k+1}.

Que la boule tirée au $(k + 1)$-*me* tirage soit rouge peut arriver de deux manières : elle est sortie de $\mathfrak{U}_\rho$ ou de $\mathfrak{U}_\sigma$ selon que la boule précédente a été rouge ou noire. La probabilité totale est donc

$$\rho_{k+1} = \rho_k \rho_\rho + \sigma_k \rho_\sigma$$

ou, utilisant (6) et (14)

$$(15) \qquad \rho_{k+1} = \tau\rho_k + \rho_\sigma.$$

Déterminons ρ par

$$(16) \qquad \rho = \tau\rho + \rho_\sigma.$$

On aura

$$\rho_{k+1} - \rho = \tau(\rho_k - \rho)$$

et, en répétant le raisonnement,

$$(17) \qquad \rho_{k+m} - \rho = \tau^m(\rho_k - \rho).$$

En posant $k = 1$ dans (17) on voit qu'en supposant

$$(18) \qquad \rho_1 = \rho, \qquad \sigma_1 = 1 - \rho$$

on obtient $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho$ c'est-à-dire que la série des variables aléatoires x_1, x_2, x_3, ... est *homogène*.

A partir d'ici, j'introduis la nouvelle hypothèse (18) comme partie essentielle de la définition de « l'hérédité » dont la structure devient

par cela homogène. Observons encore, que d'après la définition complétée, cette structure ne dépend que de deux paramètres, ρ et τ. En effet en posant

$$(19) \qquad \sigma = 1 - \rho$$

on tire de (4), (6), (16) et (19)

$$(20) \qquad \begin{cases} \rho_\rho = \rho + \tau\sigma, & \sigma_\rho = \sigma - \tau\sigma, \\ \rho_\sigma = \rho - \tau\rho, & \sigma_\sigma = \sigma + \tau\rho. \end{cases}$$

En vertu de (18), (19), (20), la composition des trois urnes $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_\rho, \mathfrak{U}_\sigma$, est exprimée par ρ et τ. On peut choisir ρ dans l'intervalle $0 < \rho < 1$. Etant donné ρ, τ doit être tel que ρ_ρ, ρ_σ, σ_ρ, σ_σ, données par (20), soient comprises entre 0 et 1. Si l'on suppose $\rho \leqq \sigma$ il est nécessaire (et aussi suffisant) que

$$(21) \qquad -1 \leqq -\frac{\rho}{1-\rho} < \tau < 1.$$

Calculons encore la probabilité d'avoir les deux équations simultanées

$$x_k = 1, \qquad x_{k+m} = 1$$

c'est-à-dire que le k-*me* et le $(k+m)$-*me* tirage donnent rouge les deux. La probabilité d'avoir $x_k = 1$ est ρ. Etant donné $x_k = 1$, on obtient la probabilité d'avoir $x_{k+m} = 1$ comme le ρ_{k+m} de la formule (17) à condition d'y mettre $\rho_k = 1$. La probabilité cherchée est la probabilité composée

$$\rho(\rho + \tau^m\sigma).$$

En calculant de la même manière encore trois probabilités analogues, on obtient la table de corrélation de x_k et de x_{k+m} :

x_{k+m} \ x_k	1	0
1	$\rho(\rho + \tau^m\sigma)$	$\sigma(\rho - \tau^m\rho)$
0	$\rho(\sigma - \tau^m\sigma)$	$\sigma(\sigma + \tau^m\rho)$

Observons que cette table étant symétrique par rapport à sa diagonale principale, la variable x_k *est liée de la même manière à* x_{k+m} *que* x_{k+m} *l'est à* x_k. Observons encore que les probabilités qui y sont

contenues ne dépendent que de m, valeur absolue de la différence des indices k et $k + m$.

En résumé :

La structure de l'« hérédité » est homogène, c'est-à-dire que toutes les variables aléatoires $x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots$ *ont les mêmes probabilités à priori. L'interdépendance entre deux variables quelconques* x_k *et* x_l *ne dépend que de leur distance* $|k - l|$.

Nous pouvons maintenant calculer tout comme au nº V, les espérances mathématiques les plus essentielles à l'étude de la structure de l'hérédité.

Valeur probable de x_n. A cause de l'homogénéité

$$(22) \qquad \mathrm{E}x_n = \mathrm{E}x_1 = \rho \cdot 1 + \sigma \cdot 0 = \rho.$$

Ecart de x_n. Le carré de cet écart est

$$(23) \qquad \mathrm{E}(x_n - \rho)^2 = \mathrm{E}(x_1 - \rho)^2 = \rho\sigma.$$

Coefficient de corrélation de x_k *et* x_{k+m}. La table de corrélation trouvée ci-dessus donne

$$(24) \qquad \mathrm{E}(x_k - \rho)(x_{k+m} - \rho) = \rho\sigma\tau^m.$$

On obtient de (23) et (24) le coefficient de corrélation

$$(25) \qquad \frac{\mathrm{E}(x_k - \rho)(x_{k+m} - \rho)^2}{\sqrt{\mathrm{E}(x_k - \rho)^2\, \mathrm{E}(x_{k+m} - \rho)^2}} = \tau^m.$$

Il est positif dans le cas de la ressemblance ($\tau > 0$) ; dans le cas de la dissemblance, il est négatif pour $m = 1$ et son signe alterne quand m parcourt successivement les nombres $1, 2, 3, \cdots$; dans les deux cas sa valeur absolue diminue si $|\tau|$ diminue ou si m augmente. Tout cela se comprend, si l'on envisage l'exemple des voyelles et des consonnes ou celui des descendants successifs, fils, petit-fils, arrière petit-fils, etc.

Valeur probable de $r = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. — C'est le nombre moyen des boules rouges sorties en n tirages. C'est $\mathrm{E}r = n\rho$.

Ecart de r. — On obtient pour son carré, en utilisant (23) et (24)

$$(26) \quad \mathrm{E}(r - n\rho)^2 = \mathrm{E}(x_1 - \rho + x_2 - \rho + \cdots x_n - \rho)^2$$
$$= n\mathrm{E}(x_1 - \rho)^2 + 2(n-1)\,\mathrm{E}(x_1 - \rho)(x_2 - \rho) + \cdots + 2\mathrm{E}(x_1 - \rho)(x_n - \rho)$$
$$= n\rho\sigma + 2(n-1)\rho\sigma\tau + 2(n-2)\rho\sigma\tau^2 + \cdots + 2\rho\sigma\tau^{n-1}.$$

Coefficient de dispersion. On a

$$(27)\quad Q^2 = \frac{E(r-n\varrho)^2}{n\varrho\sigma} = 1 + \frac{2}{n}\left[(n-1)\tau + (n-2)\tau^2 + (n-3)\tau^3 + \cdots + \tau^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1+\tau}{1-\tau} - 2\tau\,\frac{1-\tau^n}{n(1-\tau)^2}.$$

On voit, encore mieux par la première des deux expressions (27), que la dispersion est hypernormale ($Q > 1$) s'il y a « tradition » ($\tau > 0$) et hyponormale ($Q < 1$) s'il y a « opposition » ($\tau < 0$).

VII

Retournons à la structure de la « contagion » pour démontrer la proposition avancée au début du nº V.

Calculons pour commencer la probabilité q_r d'avoir

$$(28)\qquad x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 1, \qquad x_{r+1} = x_{r+2} = \cdots = x_n = 0$$

c'est à dire la probabilité que parmi n tirages successifs les r premiers donnent rouge et les s derniers noir, où

$$r + s = n.$$

q_r est une probabilité composée dont on trouve les r premiers facteurs en mettant $n = 0, 1, 2, \ldots r-1$ dans (1) et en donnant les justes valeurs à $x_1, x_2, \ldots$; on trouve les s derniers facteurs en soustrayant la valeur fournie par (1) de l'unité. La probabilité cherchée est donc

$$(29)\quad q_r = \frac{\varrho(\varrho+\delta)(\varrho+2\delta)\cdots(\varrho+(r-1)\delta)\;\sigma(\sigma+\delta)\cdots(\sigma+(s-1)\delta)}{1(1+\delta)(1+2\delta)\cdots(1+(r-1)\delta)\;(1+r\delta)(1+(r+1)\delta)\cdots(1+(n-1)\delta)}.$$

La probabilité que parmi les $n = r + s$ variables aléatoires

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots x_n$$

r déterminées soient égales à 1 et les autres s à 0, est également q_r, quel que soit l'ordre prescrit pour les 1 et les 0, parce que la probabilité en question est composée de n facteurs dont les dénominateurs sont les mêmes que de ceux qui composent q_r et les numérateurs ne sont changés qu'en ordre.

Introduisons n indéterminées (variables ordinaires) z_1, z_2, ... z_n et calculons l'espérance mathématique

$$(30) \qquad \mathrm{E} z_1^{x_1} z_2^{x_2} z_3^{x_3} \cdots z_n^{x_n}.$$

Le terme $z_1 z_2 \ldots z_r$ sera multiplié par la probabilité d'avoir les équations simultanées (28), donc par q_r. Mais un terme quelconque $z_{i_1}\, z_{i_2} \ldots z_{i_r}$, produit de r facteurs différents, sera également multiplié par q_r. La somme de tous les termes analogues est la *r-me* fonction symétrique élémentaire

$$z_1 z_2 \cdots z_r + z_1 z_2 \cdots z_{r-1} z_{r+1} + \cdots + z_{n-r+1} \cdots z_{n-1} z_n = Z_r.$$

Donc

$$(31) \quad \mathrm{E} z_1^{x_1} z_2^{x_2} \cdots z_n^{x_n} = q_0 + q_1 Z_1 + q_2 Z_2 + \cdots + q_n Z_n = \mathfrak{P}(z_1, z_2, z_3, \cdots z_n)$$

où $\mathfrak{P}(z_1, z_2, \ldots z_n)$ est un polynome symétrique de n variables.

La connaissance de $\mathfrak{P}(z_1, z_2, \ldots z_n)$ suffit pour répondre à une question de probabilité quelconque concernant $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ... $\boldsymbol{x}_n$. Par exemple la probabilité d'avoir $\boldsymbol{x}_k = 1$ est donnée par

$$\mathrm{E}\boldsymbol{x}_k = \left(\frac{\partial \mathfrak{P}(z_1, z_2, \cdots z_n)}{\partial z_k}\right)_{z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 1},$$

celle d'avoir $\boldsymbol{x}_k = 1$ et $\boldsymbol{x}_l = 1$ par

$$\mathrm{E}\boldsymbol{x}_k \boldsymbol{x}_l = \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{P}(z_1, z_2, \cdots z_n)}{\partial z_k \partial z_l}\right)_{z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 1}$$

etc. Mais $\mathfrak{P}(z_1, z_2, \ldots z_n)$ est *symétrique* en z_1, z_2, ... z_n. Par conséquent *toutes les probabilités qui dépendent de* $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ... $\boldsymbol{x}_n$ *sont parfaitement symétriques par rapport à ces* n *variables aléatoires*. Cela contient la proposition à démontrer et davantage ; par exemple l'interdépendance entre trois variables quelconques $\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{x}_l$ et $\boldsymbol{x}_m$ est la même, quels que soient les indices, etc.

Les calculs faits nous seront utiles encore pour d'autres questions. Par exemple la probabilité $p_{r,s}$ d'obtenir r fois rouge et s fois noir sur $n = r + s$ tirages dans un ordre quelconque ou d'avoir, ce qui est la même chose, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n = r$, est évidemment

$$(32) \quad p_{r,s} = \binom{n}{r} q_r = \binom{r+s}{r} \frac{\rho(\rho+\delta)\cdots(\rho+(r-1)\delta)\ \sigma(\sigma+\delta)\cdots(\sigma+(s-1)\delta)}{1(1+\delta)\cdots(1+(n-1)\delta)}.$$

En mettant $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = e^z$ dans (31) on obtient la fonction

caractéristique de la somme $r = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, c'est-à-dire la fonction

$$(33) \quad \varphi_n(z) = \mathrm{E}e^{rz} = \mathrm{E}e^{(x_1+x_2+\cdots+x_n)z} = \sum_{r=0}^{n} q_r \binom{n}{r} e^{rz} = \sum_{r=0}^{n} p_{r,n-r} e^{rz}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{\delta}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)} \int_0^1 x^{\frac{\rho}{\delta}-1}(1-x)^{\frac{\sigma}{\delta}-1}[xe^z + (1-x)]^n dx.$$

La dernière expression de $\varphi_n(z)$ s'obtient à partir de (32) à l'aide de l'expression classique de l'intégrale eulérienne B par des transformations faciles que je n'explique pas ici.

VIII

Nous devons encore connaître la fonction caractéristique de $r = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ pour la structure de l'« hérédité ». Pour gagner du temps, je cite ici sans démonstration la formule suivante de Markoff (13) : Si $p_{r,s}$ désigne la probabilité de tirer rouge r fois et noir s fois sur $n = r + s$ tirages ou, ce qui est la même chose, d'avoir $r = r$ on a

$$(34) \quad \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} p_{r,s} u^r v^s = \frac{1 - \tau(\sigma u + \rho v)}{1 - (\rho + \sigma\tau)u - (\sigma + \rho\tau)v + \tau uv} = \mathcal{F}(u, v).$$

La fonction caractéristique cherchée est

$$(35) \qquad \mathrm{E}e^{rz} = \sum_{r=0}^{n} p_{r,n-r} e^{rz} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\mathcal{F}(e^z w, w)}{w^{n+1}} dw,$$

la ligne d'intégration dans le plan de la variable complexe w étant un cercle parcouru dans le sens positif dont le centre est $w = 0$ et le rayon aussi petit que, z étant donné, la fonction analytique $\mathcal{F}(e^z w, w)$ de w soit régulière à l'intérieur et sur le cercle. Cette forme n'est pas très explicite, mais tout à fait suffisante pour les passages à la limite dont on aura besoin.

(13) Voir l. c. 7) b), p. 49, formule (10). On peut déduire de cette formule le cas limite traité par Markoff ; pour une méthode simple, voir l'indication qui sera donnée à la fin du nº IX.

IX

Rapprochons maintenant les deux structures d'interdépendance, celle de la « contagion » et celle de l' « hérédité » que nous avons traitées séparément jusqu'ici.

Considérons pour les deux structures la loi de la variable aléatoire r, donc la probabilité $p_{r,n-r}$ d'obtenir exactement r fois rouge sur n tirages, $r = 0, 1, 2, \cdots n$. Cette probabilité est déterminée par la fonction génératrice respective, (33) ou (35), même déterminée explicitement par (32) pour la première des deux structures. En portant les $n + 1$ probabilités

(36) $$p_{0,n}, \quad p_{1,n-1}, \quad p_{2,n-2}, \cdots \quad p_{n,0}$$

comme ordonnées équidistantes dans un système rectangulaire, nous obtenons une distribution (une « courbe ») de probabilités ; elle dépend de 3 paramètres dans les deux cas, de ρ, δ, n, respectivement de ρ, τ, n. Comme en statistique nous n'attribuons de valeur qu'aux observations portant sur un grand nombre d'individus, il est naturel de chercher les formes limites résultant de cette distribution, quand n, le nombre des tirages, tend vers ∞. Il y a différentes formes limites, la courbe de Gauss n'étant que la plus connue, puisque ρ et δ comme ρ et τ peuvent varier différemment avec n.

On peut classifier les formes limites de deux points de vue différents : d'abord d'après l'ordre de grandeur de ρ, c'est-à-dire d'après la fréquence de l'événement considéré, puis d'après l'ordre de grandeur de δ respectivement de τ, c'est-à-dire d'après le degré d'interdépendance entre les événements individuels.

Concernant la fréquence, je considère deux cas.

a) Je parle d'événements *usuels* si ρ garde une valeur invariable (entre 0 et 1, limites exclues) lorsque n tend vers l'infini. Dans ce cas $n\rho$, la valeur probable des tirages rouges, tend vers ∞.

b) Je parle d'événements *rares* si la valeur probable $n\rho$ garde une valeur positive invariable quand $n \to \infty$. Dans ce cas ρ tend vers zéro.

Je distinguerai trois degrés d'interdépendance. C'est Q, le coefficient de dispersion qui sera la base essentielle de la classification.

1) Les événements *indépendants* sont caractérisés par $\delta = 0$, respectivement $\tau = 0$. Dans ce cas le coefficient de dispersion Q est égal à

l'unité et, pour les deux structures envisagées, la réciproque est vraie : $Q = 1$ implique $\delta = 0$, respectivement $\tau = 0$ en vertu de (13) et de (27).

2) Je parle de *contagion faible* si δ tend vers zéro, de manière que $n\delta$ garde une valeur invariable (différente de 0 et supérieure à -1) et de *faible ressemblance* si τ garde une valeur invariable ($\tau \neq 0$, $-1 < \tau < 1$) quand $n \to \infty$. Dans ces deux cas d'*interdépendance faible* Q tend vers une limite finie positive et différente de 1.

3) Je parle de *contagion forte* si δ garde une valeur positive invariable et de *forte ressemblance* si τ tend vers 1 de manière que $n(1-\tau)$ garde une valeur positive invariable quand $n \to \infty$. Dans ces deux cas d'*interdépendance forte* $\frac{Q^2}{n}$ tend vers une limite positive finie.

Les trois degrés d'interdépendance ont été distingués d'après l'allure de Q, brièvement

$$1)\ Q = 1 \qquad 2)\ Q \text{ fini} \qquad 3)\ \frac{Q}{\sqrt{n}} \text{ fini.}$$

Nous aurions pu aussi les distinguer d'après l'allure du coefficient de corrélation entre x_1 et x_n, les deux tirages *les plus éloignés* ; c'est $\frac{\delta}{1+\delta}$ respectivement τ^{n-1}. Nous avons dans les trois cas respectivement

$$1)\ \frac{\delta}{1+\delta} = 0 \qquad 2)\ \frac{\delta}{1+\delta} \to 0 \qquad 3)\ \frac{\delta}{1+\delta} \text{ fini}$$

$$\tau^{n-1} = 0 \qquad \tau^{n-1} \to 0 \qquad \tau^{n-1} \text{ fini}$$

(en admettant $n(1-\tau) = \lambda$, on a $\tau^{n-1} \to e^{-\lambda}$).

La manière qui est la plus commode au point de vue du calcul, de caractériser les cas 1), 2), 3) ainsi que *a*) et *b*) est celle adoptée dans leur définition. C'est d'assigner à un des paramètres ρ, δ ou τ ou à une combinaison simple d'un paramètre avec n une valeur constante quand $n \to \infty$. Je réunis ces constantes, caractéristiques des cas respectifs, avec la notation dont je me servirai plus tard, dans la tabelle suivante :

	a) ρ	*b*) $n\rho = h$
1) $\delta = 0$	2) $n\delta = d$	3) δ
$\tau = 0$	τ	$n(1-\tau) = \lambda$.

Observons à propos de *a*) et *b*) qu'il aurait été inutile d'introduire un cas auquel $\rho \to 1$ puisque l'on peut supposer $\rho \leq \sigma$. Observons à

propos du cas 3) que $Q \to \infty$ implique $Q^2 > 1$ donc $\delta > 0$, $\tau > 0$. Observons encore qu'on pourrait introduire un quatrième degré d'interdépendance, celui de l'interdépendance « ultraforte » caractérisé par

$$4)\ \delta = +\infty \qquad \tau = 1$$

ou par ce que le coefficient de corrélation $\frac{\delta}{1+\delta}$ respectivement τ^{n-1} est exactement 1. Ce cas est instructif comme terme de comparaison mais sans intérêt en lui-même : Le premier excepté, les coups sont forcés. Chaque tirage à partir du second suit nécessairement son prédécesseur, de manière que la probabilité d'avoir $r = 0$ est σ, celle d'avoir $r = n$ est ρ, tandis que celle d'avoir une valeur intermédiaire quelconque est 0.

D'après ce qui a été dit, il sera clair, ce qu'il faut entendre par le cas 1*a*) par exemple. C'est le cas où les conditions 1) et *a*) sont réunies, le cas d'événements usuels indépendants (ρ est fixé, $\delta = 0$, respectivement $\tau = 0$), le cas classique de BERNOULLI menant à la loi normale de GAUSS.

Le cas 3*b*) c'est-à-dire le cas d'événements rares à interdépendance forte est celui où

$$\rho = \frac{h}{n}, \qquad \tau = 1 - \frac{\lambda}{n}$$

h, λ, δ sont des constantes positives. Dans ce cas on trouve facilement la distribution limite en envisageant $p_{0,n}$, la probabilité d'avoir $r = 0$ c'est-à-dire de ne tirer que des boules noires pendant les n premiers tirages. Pour la structure de la « contagion » on a d'après (32)

$$\begin{aligned} p_{0,n} &= \frac{\sigma(\sigma+\delta)\cdots(\sigma+(n-1)\delta)}{1(1+\delta)\cdots(1+(n-1)\delta)} \\ &= \left(1-\frac{h}{n}\right)\left(1-\frac{h}{n(1+\delta)}\right)\cdots\left(1-\frac{h}{n[1+(n-1)\delta]}\right) \\ &> 1-\frac{h}{n}\left(1+\frac{1}{1+\delta}+\frac{1}{1+2\delta}+\cdots+\frac{1}{1+(n-1)\delta}\right) \to 1, \end{aligned}$$

pour celle de l'« hérédité » on trouve

$$\begin{aligned} p_{0,n} &= \sigma\,\sigma_\sigma^{\,n-1} = (1-\rho)\,(1-\rho(1-\tau))^{n-1} \\ &= \left(1-\frac{h}{n}\right)\left(1-\frac{h\lambda}{n^2}\right)^{n-1} \to 1. \end{aligned}$$

Donc la distribution limite est la même pour les deux structures et peu intéressante comme distribution de probabilité : $\boldsymbol{r} = 0$ a la probabilité 1 et toutes les autres valeurs de $\boldsymbol{r}$ la probabilité 0. Donc le résultat est le même que si tous les tirages donnaient forcément noir dès le commencement.

Pour les autres cas la distribution limite est plus intéressante mais moins facile à calculer. Prenons par exemple le cas $3a$), le cas d'événements usuels à contagion forte, si nous nous bornons à la première des deux structures. Dans ce cas ρ et δ sont des constantes, $0 < \rho < 1$, $\delta > 0$. Introduisons la nouvelle variable aléatoire $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{r}}{n}$ qui prend la valeur $\frac{r}{n}$ avec la même probabilité que $\boldsymbol{r}$ la valeur r. Sa fonction caractéristique est donc, d'après (33)

$$\mathrm{E}e^{\boldsymbol{x}z} = \mathrm{E}e^{\frac{\boldsymbol{r}}{n}z} = \varphi_n\left(\frac{z}{n}\right) =$$
$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{\delta}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)}\int_0^1 x^{\frac{\rho}{\delta}-1}(1-x)^{\frac{\sigma}{\delta}-1}\left[xe^{\frac{z}{n}}+(1-x)\right]^n dx.$$

En observant que

$$\left[xe^{\frac{z}{n}}+(1-x)\right]^n = \left[1+\frac{xz}{n}+\frac{xz^2}{2n^2}+\cdots\right]^n \to e^{xz}$$

pour $n \to \infty$ on trouve la limite de la fonction caractéristique. On en déduit [14] que la distribution des probabilités de la variable aléatoire $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{r}}{n}$ devient continue à la limite, la densité de probabilité au point $\boldsymbol{x} = x$ étant

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{\delta}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)} x^{\frac{\rho}{\delta}-1}(1-x)^{\frac{\sigma}{\delta}-1}. \tag{37}$$

C'est de cette manière, en partant des fonctions génératrices (33) et (35) qu'on peut calculer les distributions limites pour les deux

(14) Dans ce cas comme dans tous ceux qui figurent dans ces leçons, le théorème que j'ai donné sur la limite de la fonction caractéristique (Mathematische Zeitschrift, t. VIII (1920), p. 171-181) et le théorème analogue que M. Paul Lévy a donné un peu plus tard (Comptes-rendus, t. 175 (1922) p. 854-856) sont également applicables.

structures dans tous les cas qu'on va énumérer au n° suivant. L'exemple que j'ai traité est un des plus simples ; en particulier le calcul de (35) exige un choix judicieux de la ligne d'intégration. Mais je n'ai pas le temps de m'arrêter aux détails de ces calculs.

X

Les distributions de probabilités que nous allons considérer, résultent toutes de la loi de distribution de la variable aléatoire r. On se rappelle que r prend les valeurs

$$0, \quad 1, \quad 2, \cdots n$$

avec les probabilités respectives

$$p_{0,n}, \quad p_{1,n-1}, \quad p_{2,n-2}, \cdots p_{n,0}$$

et que r n'est autre chose que le nombre des boules rouges sorties aux n premiers tirages, le schéma d'urne pouvant être celui de la « contagion » ou celui de l' « hérédité ». Quelquefois nous devrons introduire une nouvelle variable aléatoire $x = ar + b$, transformée linéaire de r avec des coefficients a, b qui dépendent de n ; x sera à la limite une variable aléatoire continue, c'est-à-dire qu'elle prendra toutes les valeurs d'un certain intervalle ; mais la loi de probabilité de x peut être discontinue. Quelquefois nous appellerons r la variable de la loi limite. Mais alors r pourra prendre des valeurs entières non-négatives quelconques

$$0, \quad 1, \quad 2, \cdots m, \cdots$$

avec des probabilités qui seront désignées par

$$p_0, \quad p_1, \quad p_2, \cdots p_m, \cdots$$

de manière qu'on ait

$$p_m = \lim_{n \to \infty} p_{m,n-m}.$$

Nous allons considérer 9 différents passages à la limite. Ce sont les cas 1*a*) 1*b*) 2*a*) 2*b*) 3*a*) expliqués au n° précédent, le cas *t*) ou cas de

transition qui sera expliqué plus loin et les cas 3*b*) 4*a*) et 4*b*), triviaux en eux-mêmes mais instructifs pour la comparaison ([15]).

1*a*) *Evénements usuels indépendants.* ρ constante, $0 < \rho < 1$, $\delta = \tau = 0$, les deux structures envisagées coïncident dans le cas particulier commun de l'indépendance. En posant

$$x = \frac{r - n\rho}{\sqrt{n\rho\sigma}}. \tag{38}$$

x prendra à la limite toutes les valeurs de l'intervalle $-\infty$, $+\infty$. La densité de la probabilité au point $x = x$ est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

C'est la courbe normale ou de GAUSS. Ce résultat classique, la « Loi des grands nombres » est dû à De MOIVRE.

1*b*) *Evénements rares indépendants.* La valeur probable $n\rho = h$ est constante, $\delta = \tau = 0$, c'est encore le cas d'indépendance, cas particulier commun aux deux structures. La probabilité p_m d'avoir $r = m$ à la limite est donnée comme coefficient de la fonction génératrice

$$\begin{aligned} Ez^r &= p_0 + p_1 z + \cdots + p_m z^m + \cdots \\ &= e^{-h} + \frac{e^{-h}h}{1!} z + \cdots + \frac{e^{-h}h^m}{1!} z^m + \cdots = e^{h(z-1)}. \end{aligned} \tag{39}$$

Ce résultat est encore classique, c'est la « Loi des petits nombres » due à POISSON.

2*a*) *Evénements usuels à interdépendance faible.* ρ constante, $0 < \rho < 1$, $n\delta = d$ constante, τ constante, $\rho + d \geqq 0$ à cause de (3) et les quatre expressions (20) sont positives. En introduisant x par (38), x varie à la limite de $-\infty$ à $+\infty$. La densité de probabilité au point $x = x$ est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mu} e^{-\frac{x^2}{2\mu^2}};$$

$$\mu^2 = 1 + d \qquad \text{ou} \qquad \mu^2 = \frac{1+\tau}{1-\tau}$$

([15]) Les cas 1*a*) 1*b*) sont classiques, ainsi qu'un cas particulier de 2*a*) (celui de la boule non remise). Pour les autres cas limites non triviaux voir : α) Structure de la « contagion » : tous les cas chez MARKOFF *l. c.* 8) et EGGENBERGER et PÓLYA *l. c.* 8) *a*) et *b*). Les courbes limites continues 3*a*) et *t*) furent rencontrées déjà avant par PEARSON ; voir n° XI. β) Structure de l' « hérédité » : 2*a*) MARKOFF *l. c.* 7) *a*) *b*) ; 2*b*) A. AEPPLI, Thèse, Zurich 1924 ; 3*a*) et *t*) ont été indiqués la première fois, à ma connaissance, dans ces leçons.

selon qu'il s'agit de « contagion » ou d'« hérédité ». C'est la courbe de GAUSS, comme au cas 1*a*), mais la dispersion diffère de la normale, le signe de la différence étant celui de d ou de τ, selon la structure.

2*b*) *Evénements rares à interdépendance faible.* $n\rho = h$, $n\delta = d$ et τ sont des constantes positives, $\tau < 1$. ($d < 0$ est exclu par (3), $\tau < 0$ par (21).) La probabilité p_m d'avoir $\boldsymbol{r} = m$ à la limite est donnée par

$$(40) \qquad \mathrm{E}z^{\boldsymbol{r}} = p_0 + p_1 z + \cdots + p_m z^m + \cdots = (1 - (z - 1)d)^{-\frac{h}{d}}$$

s'il s'agit de « contagion » et par

$$(41) \qquad \mathrm{E}z^{\boldsymbol{r}} = p_0 + p_1 z + \cdots + p_m z^m + \cdots = e^{\frac{h(1-\tau)(z-1)}{(1-\tau z)}}$$

s'il s'agit d'« hérédité ».

3*a*) *Evénements usuels à interdépendance forte.* ρ, δ, $n(1 - \tau) = \lambda$ sont des constantes positives, $0 < \rho < 1$. On introduit la variable

$$(42) \qquad \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{r}}{n}$$

qui prendra à la limite toutes les valeurs de l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$.

Pour la structure de la contagion on a une distribution limite continue ; nous avons calculé auparavant sa densité au point $\boldsymbol{x} = x$, voir (37).

Pour la structure de l'« hérédité » on a une distribution limite en partie continue, en partie discontinue. Les valeurs extrêmes

$$x = 0, \qquad x = 1$$

ont des probabilités finies, respectivement

$$\sigma e^{-\rho\lambda}, \qquad \rho e^{-\sigma\lambda},$$

les valeurs intermédiaires n'ont que des probabilités infiniment petites, la densité de la probabilité étant une fonction continue possédant toutes les dérivées. On déduit ces propriétés d'une discussion appropriée de la fonction caractéristique

$$\mathrm{E}e^{\boldsymbol{x}z} = e^{\frac{1}{2}(z-\lambda)}\left[\cosh\left(\frac{1}{2}\Delta\right) + (\lambda + (2\rho - 1)z)\,\frac{\sinh\left(\frac{1}{2}\Delta\right)}{\Delta}\right]$$

où

$$\Delta = \sqrt{z^2 + 2(2\rho - 1)\lambda z + \lambda^2}$$

et, comme d'usage,

$$2 \cosh x = e^x + e^{-x}, \qquad 2 \sinh x = e^x - e^{-x}.$$

Je note encore ici le carré de l'écart de x [16].

$$E(x - \rho)^2 = \frac{2\rho\sigma}{\lambda^2}(e^{-\lambda} - 1 + \lambda).$$

3*b*) *Evénements rares à interdépendance forte.* $n\rho$, δ, $n(1 - \tau) = \lambda$ sont des constantes positives. Le cas a été traité à la fin du nº IX. La distribution limite peut être conçue de deux manières. On peut prendre r comme variable ; alors à la limite la probabilité d'avoir $r = 0$ est 1 et celle d'avoir $r = m$ est 0 si $m > 0$. Ou bien en posant $x = ar$, x variera d'une manière continue dans un intervalle fini ou infini, dont l'extrémité gauche est le point $x = 0$; ce point aura la probabilité 1, tous les autres points ensemble la probabilité 0.

4*a*) *Evénements usuels à interdépendance ultraforte.* ρ constante, $0 < \rho < 1$, $\delta = +\infty$ et $\tau = 1$, les coups sont forcés à partir du second ; les deux structures coïncident tout à fait dans ce cas particulier. x étant défini par (42), la probabilité d'avoir $x = 0$ est σ, celle d'avoir $x = 1$ est ρ et celle d'avoir $0 < x < 1$ est 0.

4*b*) *Evénements rares à interdépendance ultraforte.* $\rho = 0$, $\delta = +\infty$, $\tau = 1$, les coups sont forcés à partir du premier. Comme distribution limite c'est la même chose que 3*b*).

t) *Cas de transition.* Dans ce cas

$$n^{\Theta}\rho, \qquad n^{\Theta}\delta, \qquad n^{1-\Theta}(1 - \tau)$$

sont des constantes positives ; Θ est une fraction constante, $0 < \Theta < \frac{1}{2}$ [17]. Ce cas est, aussi bien au point de vue de la fréquence qu'au point de vue de l'interdépendance, la transition entre les cas 3*a*) et 2*b*) comme on le voit du tableau suivant qui montre les puissances de n auxquelles $n\rho$ et Q^2 sont proportionnels.

$n\rho$:	$a)\, n$	$t)\, n^{1-\Theta}$	$b)\, n^0$
Q^2 :	$3)\, n$	$t)\, n^{1-\Theta}$	$2)\, n^0$.

(16) Pour une connexion possible de cette formule avec des questions de physique voir G. J. Taylor, Diffusion by continuous movements, Proceedings of the London M. S. 2ᵉ série, t. XX (1921), p. 196-210, en particulier p. 198-201.

(17) On peut arriver à la même loi limite sous des conditions un peu moins restrictives.

Posons

$$\frac{\rho}{\delta} = \rho n(1 - \tau) = \alpha,$$

$$\frac{r}{n\delta} = (1 - \tau)\, r = x.$$

Pour les deux structures, x variera à la limite continuement de 0 à ∞.

Pour la structure de la contagion, on a une distribution limite continue ; sa densité au point x est

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} e^{-x}.$$

Pour la structure de l'hérédité, on a une distribution limite en partie continue, en partie discontinue. La probabilité d'avoir $x = 0$ est finie, $= e^{-\alpha}$. Les valeurs positives de x n'ont qu'une probabilité infiniment petite, la densité de probabilité au point x étant

$$e^{-\alpha-x}\,\frac{\sqrt{\alpha}\,\mathfrak{J}_1(2i\sqrt{\alpha x})}{i\sqrt{x}} = e^{-\alpha-x}\sum_{0}^{\infty}\frac{\alpha^{n+1}x^n}{(n+1)!\,n!}$$

où $\mathfrak{J}_1(x)$ désigne la fonction de Bessel d'indice 1.

Je termine cette énumération par une tabelle et un diagramme que voici.

Cas	Limites	p	$\mathfrak{L}$
1*a*	— ∞, ∞	0	2
1*b*	—	1	—
2*a*	— ∞, ∞	1	2
2*b*	—	2	—
3*a*	0, 1	2	4
(3*b*)	—	0	—
(4*a*)	0, 1	1	3
(4*b*)	—	0	—
t	0, ∞	1	3

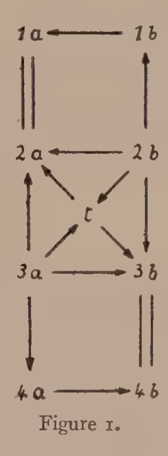


Figure 1.

La première colonne de la table contient le nom du cas limite. Il faut se rappeler que 1, 2, 3, 4 y désignent des degrés croissants d'interdépendance, *a* les événements usuels, *b* les rares. Les cas tri-

viaux sont entre parenthèses. La seconde colonne donne des limites de la variation de la variable aléatoire, si cette variation est continue ; un trait horizontal désigne les cas où cette variable ne prend que les valeurs 0, 1, 2, 3, ... ; les cas 3*b*) et 4*b*) sont traités ici comme discontinus. La 3-me colonne donne p, le nombre des paramètres de la distribution sous sa forme considérée dans l'énumération, et la 4-me colonne, pour les distributions à variable continue, le nombre total $\mathfrak{P}$ des paramètres qu'on peut y introduire en faisant usage d'une transformation linéaire arbitraire.

Dans le diagramme toutes les distributions, aussi les discontinues, sont considérées comme admettant une transformation linéaire arbitraire de la variable aléatoire. Alors la différence entre 1*a*) et 2*a*) disparaît ; c'est pour cela qu'ils sont réunis par un signe = (mis verticalement) de même que 4*b*) et 3*b*). La flèche allant de 2*b*) à 1*b*) indique que 1*b*) est cas limite de 2*b*). En effet, en faisant $d \to 0$ dans (40) ou en mettant $\tau = 0$ dans (41) on obtient les deux fois (39). Inversement, la distribution 2*b*) qui contient 2 paramètres ne peut pas être cas limite de 1*b*) qui n'en contient qu'un. Les autres flèches ont une signification analogue. Le cas 3*b*) est considéré ici comme continu. Il est à remarquer que la courbe de Gauss, 1*a*) ou 2*a*), est cas limite de 1*b*) 2*b*) *t*) et 3*a*), donc de toutes les autres distributions non triviales. Qu'on observe aussi la situation de cas *t*), intermédiaire entre 3*a*) et 2*b*) mais, d'une autre manière, aussi entre 3*a*) et 2*a*).

C'est l'analogie des deux structures de la « contagion » et de « l'hérédité » qui me paraît le plus remarquable en tout ceci. Elle est tellement complète qu'en construisant la table et le diagramme, il était superflu de séparer les structures.

XI

Les résultats énumérés au n° précédent ouvrent la voie à d'autres recherches. Je dois me borner à quelques indications.

1. L'énumération des cas limites est-elle *complète* ? Je ne saurais donner une réponse définitive [18]. J'esquisserai une réponse partielle

(18) En tous cas il manque le cas où la variable aléatoire x étant déterminée par (42), $x = \rho$ a la probabilité 1 à la limite. Ce cas limite, trivial en soi-même, peut être atteint d'une manière intéressante, par exemple lorsqu'il y a une « opposition extrême » dans la structure de l' « hérédité » :

$$\rho = \sigma = \frac{1}{2}, \qquad \tau = -1, \qquad Q^2 = \frac{1-(-1)^n}{2n} \to 0.$$

en me servant d'une modification de la méthode par laquelle M. Karl PEARSON a obtenu primitivement les distributions qui proviennent ici, aux cas $3a$) et t), de la structure de la « contagion ». Pour cette structure, on obtient de (32), en écrivant pour abréger p_r à la place de $p_{r,n-r}$,

$$\frac{p_{r+1}-p_r}{p_{r+1}} = -\frac{(1-2\delta)(r+1)-(n+1)(\rho-\delta)}{(r\delta+\rho)(n-r)}, \tag{43}$$

$$\frac{p_r-p_{r-1}}{p_{r-1}} = -\frac{(1-2\delta)r-(n+1)(\rho-\delta)}{r(n\delta+\sigma-r\delta)}. \tag{44}$$

Si nous considérons r comme variable, le dénominateur de la fraction dans le second membre est un polynome de second degré dont les racines sont réelles :

$$r = -\frac{\rho}{\delta}, \qquad n \qquad \text{pour (43)},$$

$$r = 0, \qquad n+\frac{\sigma}{\delta} \qquad \text{pour (44)}.$$

Le domaine de variabilité de la variable aléatoire r est compris entre 0, première racine pour (44) et n, seconde racine pour (43).

Une transformation linéaire $\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{r} + b$ changera (43) et (44) en équations analogues avec des propriétés correspondantes des racines. Admettons que dans un cas limite où la variable aléatoire est $\boldsymbol{x}$, il y ait une densité de probabilité $y = \varphi(x)$ qui est une fonction dérivable de x ; admettons en outre que la convergence vers le cas limite soit « suffisamment bonne ». Alors (43) et (44) *coïncideront* à la limite dans une même équation de la forme

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{a_0+x}{b_0+b_1x+b_2x^2} \tag{45}$$

où *le dénominateur* $b_0 + b_1x + b_2x^2$ *n'a pas de racines imaginaires.* Observons que le degré du dénominateur peut s'abaisser à la limite si l'une ou l'autre des racines devient infinie. On voit que *le domaine de variation de* x *est compris entre les deux racines, entre* ∞ (*ou* $-\infty$) *et l'unique racine ou enfin entre* $-\infty$ *et* $+\infty$ *selon que le degré du dénominateur est* 2, 1, *ou* 0.

Faisant abstraction d'une transformation linéaire, on peut admettre que le dénominateur du second membre de (45) est $x(1-x)$ ou x ou 1.

Ces trois cas figurent effectivement dans l'énumération du nº X. On obtient en partant de (43) ou de (44)

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\rho}{\delta} - 1\right)\frac{1}{x} + \left(\frac{\sigma}{\delta} - 1\right)\frac{1}{x-1} \qquad \text{au cas } 3a)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -1 + \frac{\alpha - 1}{x} \qquad \text{au cas } t)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{1+d} \qquad \text{au cas } 2a).$$

Les racines de $b_0 + b_1x + b_2x^2$ étant supposées réelles, une discussion facile des intégrales y de l'équation (45) montre que, abstraction faite toujours d'une transformation linéaire, ces trois cas $3a)$ $t)$ $2a)$ sont les seuls où $\int y dx$ converge entre les limites admissibles (racines et $\pm\infty$ comme spécifié ci-dessus).

D'après cela, en tant qu'il s'agit des distributions limites *continues* de la structure de la « contagion », notre énumération est complète.

2. Comme il a été dit, les considérations précédentes ne sont qu'une modification de la première déduction que M. Pearson a donnée de ses courbes de fréquence bien connues provenant de (45) ([19]).

Je n'ai pas à discuter ici, bien entendu, l'intérêt des applications que M. Pearson et son école ont faites de ces courbes. Tout ce que je dirai se rapportera à la première introduction citée, entre laquelle et le présent traitement, il convient de signaler les différences suivantes:

(*a*) Je considère ici (43) et (44) à la place du rapport $\frac{2(p_{r+1} - p_r)}{p_{r+1} + p_r}$ considéré par M. Pearson.

(*b*) Le point de départ est ici le schéma d'urnes de la « contagion », schéma plus général que celui de la boule non-remise dont s'est servi M. Pearson.

(*c*) Les cas considérés ici sont des cas limites ; pour chacun d'eux j'ai indiqué soigneusement de quelle manière il faut varier les paramètres du schéma initial pour y arriver et quelle est la signification du passage à la limite pour la structure des probabilités. Les cas considérés par M. Pearson proviennent de l'équation (45), bien sûr, mais ils ne proviennent pas pour cela d'une structure de probabilités, puisque M. Pearson fait varier les paramètres d'une façon

(19) Philosophical Transactions, t. 186 (1895), p. 343-414.

quelconque, sans se soucier, comme d'ailleurs il le dit explicitement lui-même, si ses formules restent ou ne restent pas susceptibles d'interprétation dans les termes du problème initial.

La dernière remarque explique pourquoi nous n'avons pas obtenu ici toutes les courbes de M. PEARSON bien que nous soyons partis d'un schéma d'urnes plus général [20].

3. Notre déduction donne à chacune des courbes limites obtenues une signification, la rattache à une structure d'interdépendance qu'on pourra, avec une approximation plus ou moins grande, reconnaître au matériel statistique fourni par l'observation.

Un exemple suffira pour montrer le genre d'application que j'ai en vue. Envisageons la statistique d'une épidémie rare, comme la petite vérole ou le choléra le sont de nos jours. Les individus observés sont les habitants d'un pays. On enregistre les cas mortels par suite de l'épidémie par mois. A la fin d'une certaine période on aura constaté M_0 mois sans cas mortels, M_1 avec exactement 1, ... M_r avec exactement r cas mortels. Il s'agit de donner une expression théorique à laquelle la suite

$$M_0, M_1, M_2. \cdots M_r, \cdots \tag{46}$$

pourra être assimilée.

Observons d'abord que l'épidémie est *rare*. Donc il est naturel d'examiner si la suite (46) est porportionnelle ou non à la suite des probabilités

$$p_0, p_1, p_2. \cdots p_r, \cdots \tag{47}$$

données par une des formules (39) (40) (41) relatives aux événements rares (cas 1*b*) et 2*b*)).

Observons ensuite que les cas d'épidémie ne semblent pas être indépendants : un mois avec beaucoup de cas est un mauvais présage pour le suivant. Cela élimine à peu près *à priori* la formule (39) du cas 1*b*) d'événements rares indépendants.

Reste à décider entre les deux formules (40) et (41) du cas 2*b*) ; la première provient de la structure de la « contagion », la seconde de celle de l'« hérédité ». Dans la première structure l'influence mutuelle mesurée par le coefficient de corrélation est la même entre deux indi-

(20) Que les autres courbes de M. PEARSON ne sont pas cas limites du schéma d'urnes de la contagion, a été montré encore d'une autre manière, plus rigoureuse par M. EGGENBERGER.

vidus quelconques de la population, dans la seconde l'influence mutuelle décroît rapidement avec la distance croissante des individus (supposés rangés en série linéaire). On dirait que la réalité est quelque part entre les deux structures. Si l'on envisage les schéma d'urnes, c'est la première structure qui semble être plus près de la réalité (voir le commencement du n° III).

Les calculs numériques exécutés ([21]) montrent que (39) (indépendance) est décidément en désaccord avec les faits; (41) (« hérédité ») donne une approximation meilleure et (40) (« contagion ») va encore mieux. S'il s'agit de la statistique de cas mortels par suite de certains accidents industriels, l'indépendance est encore en désaccord, et les deux structures de la « contagion » et de l'« hérédité » fournissent des approximations à peu près égales.

4. Il y a des explications plausibles, il n'y en a pas d'obligatoires, au moins pas en statistique. Un exemple frappant de ce principe est donné par la structure de la « contagion » au cas 3*a*); si $\rho = \sigma = \delta = \frac{1}{2}$, la densité de probabilité correspondante, donnée par (37) devient égale à 1 pour $0 < x < 1$, c'est-à-dire que la distribution de probabilités devient uniforme dans l'intervalle 0,1. Personne n'a trouvé nécessaire d'expliquer une répartition uniforme de probabilité par quelque chose d'autre, mais nous voyons qu'elle *peut* être expliquée par une structure compliquée d'interdépendance. Sans doute elle pourrait être expliquée encore d'une infinité d'autres manières ([22]).

Voici un autre exemple. Si on rencontrait des séries d'événements alternatifs et homogènes montrant une dispersion anormale, mais réparties d'après la loi de GAUSS, la statistique correspondrait à notre cas 2*a*). On pourrait l'expliquer tout aussi bien en supposant une structure de « contagion » qu'une structure d'« hérédité », bien que ces structures soient différentes; mais elles mènent, dans le cas 2*a*), à la même répartition des fréquences.

5. Les deux structures envisagées, celle de la « contagion » et celle de l'« hérédité » sont différentes, mais leurs cas limites montrent un parallélisme remarquable, comme on a vu aux n°s IX et X. Dans

(21) Pour les calculs avec (39) et (40) voir EGGENBERGER *l. c.* 8). Les calculs concernant (41) ne sont pas encore publiés.

(22) Des remarques analogues s'appliquent au cas $\sigma = \rho = \delta$, n fini, plus intéressant encore à certains égards.

quels cas ce parallélisme va-t-il, malgré la différence des structures, jusqu'à la coïncidence des lois limites ?

Il faut écarter ici le cas de l'indépendance ainsi que celui de l'interdépendance ultraforte, donc les cas

1*a*) 1*b*) 4*a*) 4*b*)

parce que dans ces cas particuliers communs les deux structures ne sont pas effectivement différentes. Elles sont effectivement différentes mais donnent la même loi limite dans les cas

2*a*) 3*b*)

et donnent des lois limites différentes dans les cas

3*a*) *t*) 2*b*)

Laissons encore de côté le cas 3*b*), trivial et pas trop différent de 4*b*). Alors le cas 2*a*) reste le seul cas où la même loi limite a pu s'imposer aux deux structures, malgré leur différence effective, et cette loi limite commune est la loi de GAUSS.

Ce fait me semble symptomatique ; il nous fait entrevoir que la loi de GAUSS jouit d'une situation exceptionnelle non seulement dans la théorie des probabilités indépendantes, mais aussi dans celle des interdépendantes. En effet, en poursuivant les recherches de MARKOFF, M. Serge BERNSTEIN a réussi à montrer dans un travail très important(23) que c'est la loi de GAUSS qui doit résulter de la superposition d'un grand nombre d'événements interdépendants, pourvu que l'interdépendance soit suffisamment « faible ». (Je n'ai énoncé qu'une des conditions et d'une manière assez vague.)

Du résultat de M. BERNSTEIN on ne peut pas conclure qu'en dehors de la loi de GAUSS il n'y a pas d'autres lois qui puissent s'imposer en même temps à des structures d'interdépendance très différentes. On ne peut pas conclure cela des exemples traités dans ce travail non plus, mais c'est ce qui est rendu plausible par tout ce qui a été dit. Il serait important de préciser ces remarques et de trouver quelque propriété de la loi de GAUSS qui caractérise sa place dans la théorie des probabilités interdépendantes comme elle a été caractérisée dans celle des indépendantes. Ce problème est encore bien obscur ; toutefois j'ai tenu à le signaler avant de terminer ces leçons.

(23) *l. c.*, II).

Le Théorème fondamental de la théorie des erreurs

PAR

M. Paul LÉVY

Mesdames, Messieurs,

Permettez-moi d'abord d'adresser à M. Emile Borel l'expression de ma reconnaissance pour le grand honneur qu'il m'a fait en m'invitant à prendre la parole dans cette salle. Permettez-moi aussi de prévenir ceux d'entre vous qui ont entendu les remarquables conférences de M. Pólya, que la présente conférence a un objet bien différent, et plus modeste ; ce ne sont pas des résultats nouveaux, mais des résultats connus depuis longtemps, et pour la plupart classiques, que je vais avoir l'honneur d'exposer devant vous.

1. Considérations générales sur les erreurs dans les mesures physiques. — Le but que je me suis proposé est de vous faire comprendre le théorème fondamental de la théorie des erreurs. D'après ce théorème, *l'erreur accidentelle, commise dans la mesure d'une grandeur physique, obéit à la loi de* Gauss.

Il faut d'abord préciser ce qu'on appelle erreur accidentelle. Le caractère essentiel d'une telle erreur est de dépendre du hasard ; si l'on recommence la mesure dans les mêmes conditions, l'erreur accidentelle variera ; elle sera tantôt positive, tantôt négative, et l'on peut espérer que ces différentes erreurs se compenseront si l'on prend la moyenne des résultats obtenus ; la précision est alors augmentée. L'erreur qui n'est pas accidentelle est dite systématique ;

on ne peut pas espérer la corriger de la même manière, et il n'y a pas de bonne mesure si l'on n'arrive pas à éviter ou corriger toutes les causes d'erreurs systématiques.

La distinction entre ces deux sortes d'erreurs est souvent assez délicate. Contentons-nous de le montrer par un exemple, celui de l'erreur de lecture. Supposons pour fixer les idées que l'on ait à lire la position d'un trait de repère en face d'une règle graduée en millimètres, et qu'on se contente de lire le nombre entier de millimètres, sans chercher à apprécier la partie fractionnaire ξ du nombre inconnu X. Si cette partie fractionnaire est inférieure à 0, 4, pour fixer les idées, on lira le nombre entier n immédiatement inférieur à x ; de 0, 6 à 1 au contraire, on lira $n + 1$; entre 0, 4 et 0, 6 on hésitera ; on lira tantôt n, tantôt $n + 1$, la probabilité de cette seconde valeur augmen-

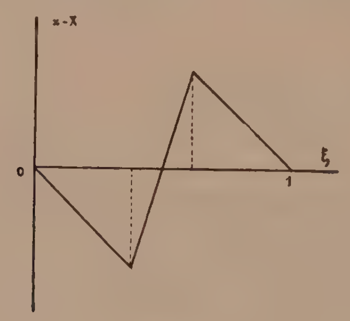


Fig. 1.

tant avec ξ, suivant une formule que nous supposerons linéaire. Dans ces conditions, cela ne sert à rien de recommencer la lecture ; un même observateur ne pourrait guère oublier le résultat de la lecture précédente et relirait le même nombre, n ou $n + 1$. Si l'on prend la moyenne des lectures faites par un grand nombre d'observateurs indépendants, on obtient une valeur x, fonction continue de $X = n + \xi$, et l'erreur commise $x - X$ est une fonction continue de ξ, représentée par la figure ci-contre. C'est une erreur systématique ; la répétition des expériences ne permet pas de la corriger.

Supposons au contraire que, pour mesurer la distance de deux traits de repère, on déplace à chaque lecture la régle graduée ; ξ varie d'une lecture à l'autre, les différentes valeurs entre 0 et 1 étant également probables. La moyenne des différentes erreurs $x - X$ différera alors

peu de sa valeur théorique, qui est la valeur moyenne de la fonction $x - X$ de ξ que nous venons de définir quand ξ varie de 0 à 1 ; cette valeur est zéro ; il en sera ainsi à chaque extrémité de la règle. Dans ces conditions on peut arriver à une précision théoriquement indéfinie : l'erreur de lecture est devenue accidentelle ; on peut maintenant la corriger en recommençant la mesure et en prenant la moyenne des résultats obtenus.

D'une manière générale l'erreur de lecture est systématique si la répétition de la mesure que l'on envisage implique la répétition exacte des mêmes lectures ; elle devient accidentelle dans le cas contraire.

Bien entendu l'on ne peut pas toujours transformer l'erreur systématique en erreur accidentelle. Cela ne serait d'ailleurs pas toujours désirable ; il importe en effet de s'attaquer directement à chaque cause d'erreur et de la corriger aussi exactement que possible. Il ne doit rester, dans une bonne méthode de mesure, que des erreurs trop petites pour être corrigées ; chacune est négligeable. Mais leur réunion peut constituer une erreur appréciable. *L'erreur accidentelle apparaît ainsi comme constituée par la réunion d'erreurs indépendantes et très petites.*

Ce résultat n'est pas encore assez précis pour constituer le point de départ d'une théorie mathématique. Il faut préciser la relation entre ces erreurs élémentaires et leur résultante. L'hypothèse la plus simple consiste à supposer que ces erreurs élémentaires s'ajoutent ; c'est sur cette hypothèse que repose la théorie mathématique classique, qui conduit à cette conclusion que l'erreur accidentelle obéit à la loi de Gauss. Mais nous devons nous demander si elle est vérifiée en fait.

Cela dépend naturellement des cas. Le calcul des probabilités nous habitue, dès ces débuts, à cette idée que certains cas semblent faits exprès pour donner l'occasion d'appliquer la théorie. C'est ainsi que a notion de probabilité a un sens très clair lorsqu'on parle du tirage d'une carte dans un jeu bien battu. L'étude de ces cas présente un grand intérêt, et aide à comprendre un peu ce qui se passe dans des cas plus complexes et dont la théorie ne peut être faite exactement ; les résultats obtenus dans les cas simples ne peuvent s'appliquer d'une manière exacte à ces cas complexes ; mais on ne doit pas être surpris de constater qu'ils s'appliquent d'une manière approchée. Ainsi on ne s'étonne pas de constater la constance de certaines fréquences, même quand aucune théorie ne permet de les calculer.

Dans la théorie des erreurs, un cas où la théorie s'applique assez bien

est celui de l'erreur due à la réfraction atmosphérique dans les observations astronomiques. Cette erreur comporte une partie systématique due à la densité croissante des couches atmosphériques traversées par le rayon lumineux. Cette erreur systématique corrigée, il reste une erreur accidentelle, due à l'influence des perturbations de l'atmosphère ; elle apparaît bien comme la somme des déviations ainsi produites aux différentes altitudes.

Considérons maintenant le cas d'un télémètre, ayant pour objet la mesure d'une distance x, et la déduisant de la mesure d'un angle θ très petit et variant en raison inverse de x. La théorie s'applique assez bien à l'angle θ, et l'erreur $\delta\theta$ commise sur cet angle obéit à la loi de GAUSS, dont nous rappellerons tout à l'heure la définition ; c'est une loi symétrique, donnant les mêmes probabilités à deux valeurs égales et opposées. Il en résulte pour l'erreur sur x une loi différente, évidemment dissymétrique ; la théorie ne s'applique pas à l'erreur sur x. Mais si la mesure est précise, c'est-à-dire si l'erreur dx commise sur x (et non seulement chacune des erreurs partielles dont elle résulte) est très petite, $\delta\theta$ et δx sont proportionnels, et l'erreur sur x obéit à la loi de GAUSS.

D'une manière générale si une mesure est précise, c'est-à-dire si une variation de la quantité à mesurer x de même ordre de grandeur que l'erreur possible apparaît comme étant sans influence sur les conditions de la mesure, x et les différentes fonctions de x que l'on peut avoir à considérer varient proportionnellement dans ces limites, et il importe peu de savoir à laquelle de ces fonctions la théorie s'applique le mieux ; on peut l'appliquer à x et dire que l'erreur sur x obéit à la loi de GAUSS.

On peut exprimer la même idée sous une autre forme en disant que, les variables δx étant assez petites pour que l'on puisse négliger leurs carrés, toutes les formules deviennent linéaires. L'erreur totale ne peut donc être que la somme des erreurs partielles qui la constituent.

Mais ce n'est pas là un raisonnement rigoureux ; même si les erreurs partielles sont très petites, d'autres formules que l'addition sont possibles. M. FRÉCHET a étudié le cas où l'on prendrait pour l'erreur résultante X la plus grande des erreurs partielles, prise en valeur absolue ; il a montré que dans cette hypothèse on peut développer une théorie analogue à la théorie classique ; mais la loi de GAUSS est remplacée par une loi différente.

Imaginons un examen dans lequel chaque candidat, ayant à effectuer un certain nombre de mesures, commettrait dans ces différentes mesures des erreurs de valeurs absolues x_1, x_2, ..., x_n. Supposons que l'examinateur dise : « Je ne crois pas au calcul des probabilités ; peu m'importent la valeur moyenne ou la valeur quadratique moyenne de ces erreurs ; ce qui m'intéresse c'est la plus grande erreur que le candidat risque de commettre. Je ne tiens donc compte que de la plus grande en valeur absolue des erreurs commises, et c'est d'après sa valeur X que je note le candidat. » Un tel examinateur aurait sans doute tort. Supposons quand même qu'il existe et cherchons à prévoir, avant l'examen, la note du candidat ; nous trouverons qu'elle dépend de la loi de M. FRÉCHET (du moins si n est assez grand).

Mais un tel exemple est exceptionnel. Les fonctions que l'on peut rencontrer dans l'étude de la composition des erreurs sont le plus souvent des fonctions continues, à dérivées continues, et même développables en série de TAYLOR. Si les erreurs sont très petites, on peut négliger leurs carrés et leurs produits ; l'erreur totale est une fonction linéaire des erreurs partielles, et la théorie classique s'applique.

Cette théorie, nous l'avons dit, nous conduira à ce résultat que l'erreur accidentelle obéit à la loi de GAUSS. Nous voyons comment il faut comprendre cet énoncé. Il repose sur certaines hypothèses, notamment sur l'hypothèse de l'additivité des erreurs partielles, et sur la petitesse aussi bien de chacune de ces erreurs partielles par rapport à leur somme que sur la petitesse de cette somme. Ces hypothèses semblent naturelles, et seront sans doute assez exactement vérifiées dans la plupart des applications. Mais il ne faut pas oublier que les résultats de la théorie ne sont applicables qu'à cette condition ; qu'il est nécessaire dans chaque application, soit de s'assurer que ces hypothèses sont bien vérifiées, soit de vérifier expérimentalement que la loi de l'erreur est bien celle de GAUSS ; qu'en général il n'en sera ainsi que d'une manière approchée. Il ne faut pas oublier notamment que la théorie suppose que l'erreur accidentelle soit la somme d'une infinité d'erreurs indépendantes et infiniment petites ; or dans les cas les plus favorables il ne peut être question que d'un nombre très grand, mais fini, d'erreurs partielles.

2. EXPOSÉ DE LA THÉORIE MATHÉMATIQUE. — Rappelons d'abord la définition de la loi de GAUSS. On dit qu'une variable ξ obéit à la

loi de Gauss réduite si la probabilité de *l'inégalité*

(1) $$\alpha < \xi < \beta$$

est, quels que soient α et β, égale à l'intégrale

(2) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,d\xi,$$

c'est-à-dire à l'aire hachurée de la figure ci-dessous, où l'on a tracé la courbe de Gauss

(3) $$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La valeur probable de ξ est alors zéro, et sa valeur quadratique moyenne est 1 (propriétés caractéristiques des lois *réduites*). La loi

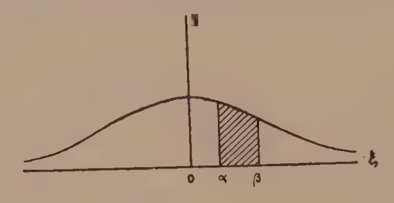


Fig. 2.

de Gauss générale est celle à laquelle obéit la variable $x = a\xi$, a étant une constante.

Considérons alors une variable x, obéissant à une loi de probabilité quelconque, à cela près que sa valeur probable doit être nulle et que sa valeur quadratique moyenne a une valeur finie m. Si cette loi dépend d'un paramètre variable, nous dirons qu'elle tend vers celle de Gauss, ou d'une manière plus précise que la loi à laquelle obéit la *variable réduite* $\xi = \frac{x}{m}$ tend vers la loi de Gauss réduite, si la probabilité de l'inégalité (1) tend vers la valeur (2) ; on voit aisément que cette convergence est nécessairement uniforme.

La loi de Gauss a une propriété importante, facile à démontrer : elle est *stable*. On entend par là que, si plusieurs variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$, obéissent à la loi de Gauss, il en est de même de leur somme

(4) $$X = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Mais ce qui est plus remarquable encore, c'est que, si les lois auxquelles obéissent $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont quelconques, la loi *résultante* à laquelle obéit X ressemble plus à la loi de Gauss que les lois composantes, et tend pour n infini vers celle de Gauss, du moins si chacun des termes est très petit. En d'autres termes : *la somme de* n *erreurs indépendantes et très petites, dont les valeurs probables sont nulles, obéit à une loi, tendant, pour* n *infini, vers celle de Gauss* (1).

C'est bien le résultat qu'il s'agit d'établir pour la théorie des erreurs. Il faut d'ailleurs encore préciser le sens de l'expression « très petites » qui figure dans l'énoncé. Elle signifie que les erreurs sont très petites par rapport à la valeur quadratique moyenne M de l'erreur totale X ; rappelons que M est lié aux valeurs quadratiques moyennes $m_1, m_2, \ldots, m_n$ par la formule

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2, \tag{5}$$

Pour qu'on puisse dire que les erreurs sont très petites, il suffit alors évidemment qu'aucune d'entre elles ne puisse en aucun cas dépasser εM, ε étant un nombre très petit, et tendant vers zéro pour n infini. Mais, la valeur quadratique moyenne d'une variable donnant assez bien idée de l'ordre de grandeur auquel il faut s'attendre pour cette variable, et les valeurs beaucoup plus grandes, si elles sont possibles, étant très peu probables, on peut se demander s'il ne suffirait pas que $m_1, m_2, \ldots, m_n$, soient inférieurs à εM. Il n'en est pas ainsi ; mais cette hypothèse devient suffisante si l'on ajoute une condition supplémentaire très peu restrictive, qu'on peut énoncer par exemple en disant qu'on commet une erreur relative négligeable sur la somme (5) en ne tenant compte que des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ inférieures à εM. On peut donner aussi d'autres formes à cette condition supplémentaire, de sorte que le théorème fondamental est susceptible de recevoir plusieurs énoncés légèrement différents. Celui que nous venons d'indiquer résulte des travaux de M. Lindeberg.

Nous ne pouvons, dans cette conférence, donner la démonstration complète de ce théorème fondamental. Mais nous indiquerons brièvement le principe de trois méthodes différentes auxquelles se rattachent les recherches relatives à ce sujet.

(1) Sans la restriction que les x_h aient leurs valeurs probables nulles, le résultat subsisterait pour X, à une constante additive près ; mais si cette constante n'était pas nulle, elle devrait être rattachée à l'erreur systématique, et le résultat relatif à l'erreur accidentelle subsisterait sans modification.

La première méthode, celle de Bernoulli, repose sur l'étude du jeu de pile ou face. A chaque coup le gain x peut avoir les valeurs $+1$ et -1, chacune de ces valeurs ayant la probabilité $\frac{1}{2}$. Après n coups, les valeurs possibles du gain total X sont

$$n, \quad n-2, \quad n-4, \cdots, -n,$$

leurs probabilités respectives étant

$$\frac{1}{2^n}, \quad \frac{C_n^1}{2^n}, \quad \frac{C_n^2}{2^n}, \cdots, \frac{1}{2^n}.$$

La valeur quadratique moyenne de X, d'après la formule (5), étant $\sqrt{n}$, il est naturel de considérer le gain réduit $\xi = \frac{X}{\sqrt{n}}$, et, en désignant par $d\xi = \frac{2}{\sqrt{n}}$ la différence de deux gains consécutifs, de mettre la probabilité de ce gain sous la forme $f_n(\xi)d\xi$. Un calcul facile montre alors que $f_n(\xi)$ tend, uniformément, pour n infini, vers la fonction de Gauss $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$; cela revient à dire que le gain réduit obéit, à la limite, à la loi de Gauss réduite.

On voit ainsi clairement la manière dont s'introduit cette courbe ; elle est dessinée en quelque sorte par la représentation graphique des coefficients du binôme. Seulement cela n'apparaîtrait pas si l'on marquait les points d'abscisses p et d'ordonnées $C_n^q \left(q = \frac{n}{2} + p\right)$; il faut en outre multiplier les abcisses par $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et les ordonnées par $\frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}}$.

Ce résultat obtenu, il est facile d'abord d'en déduire une nouvelle démonstration du fait que la loi de Gauss est stable, ensuite de le généraliser de plusieurs manières, en supposant que la loi de probabilité de chacun des gains successifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne soit pas celle du jeu de pile ou face, et même qu'elle varie d'un coup à l'autre. Mais il n'est pas facile d'arriver ainsi au degré de généralité nécessaire pour la théorie des erreurs, où l'on ne sait pour ainsi dire rien sur les lois des erreurs élémentaires, si ce n'est qu'elles sont petites ; une théorie introduisant d'autres hypothèses ne peut donc pas expliquer la grande généralité du fait que l'erreur accidentelle obéisse (au moins d'une manière approchée) à la loi de Gauss.

Passons donc à la seconde méthode, celle de M. Lindeberg (1920

et 1922). Chacune des erreurs partielles x_h, ($h = 1, 2, ..., n$), étant représentée par $m_h \xi_h$, m_h étant sa valeur quadratique moyenne, de sorte que ξ_h est l'erreur réduite correspondante, l'erreur totale réduite est

(6) $$\frac{X}{M} = \frac{m_1}{M}\xi_1 + \frac{m_2}{M}\xi_2 + \cdots + \frac{m_n}{M}\xi_n.$$

M. LINDEBERG considère d'autre part des variantes auxiliaires ξ_1', ξ_2', ..., ξ_n', obéissant à la loi de GAUSS réduite, et indépendantes les unes des autres. On voit aisément que la somme

(7) $$\frac{X'}{M} = \frac{m_1}{M}\xi_1' + \frac{m_2}{M}\xi_2' + \cdots + \frac{m_n}{M}\xi_n'$$

obéit aussi à la loi de GAUSS réduite. Or on passe de la somme (7) à la somme (6) qu'il s'agit d'étudier en remplaçant successivement ξ_1', par ξ_1, ξ_2' par ξ_2, ..., ξ_n' par ξ_n. Une discussion des erreurs ainsi commises , relativement élémentaire quoiqu'elle nécessite quelques précautions, montre que, sous les hypothèses rappelées tout à l'heure, non seulement chacune de ces erreurs, mais l'erreur totale commise en remplaçant $\frac{X'}{M}$ par $\frac{X}{M}$, est très petite. A la limite, $\frac{X}{M}$ obéira bien à la loi de GAUSS réduite.

La troisième méthode dont nous voulons parler repose sur l'étude de la *fonction caractéristique* ; cette méthode, déjà considérée par CAUCHY, et même incidemment par quelques prédécesseurs de CAUCHY, a été renouvelée par CHARLIER, et nous-même en avons développé systématiquement les conséquences.

La fonction caractéristique, que nous désignerons par $\varphi(t)$, est la valeur probable de l'exponentielle imaginaire e^{itx}, x étant la variable obéissant à la loi étudiée, et t une variable auxiliaire. Ainsi, dans le cas d'une loi continue, où chaque intervalle dx a la probabilité $f(x)dx$, on a

(8) $$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx$$

et la formule de FOURIER

(9) $$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt$$

nous permet de calculer $f(x)$ connaissant $\varphi(t)$. La fonction des probabilités totales

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi$$

se déduit alors aisément de la formule (9) par intégration sous le signe d'intégration. Il vient ainsi

$$(10) \qquad F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-itx}}{it}\varphi(t)dt.$$

Or, à condition d'écrire cette formule sous la forme

$$(11) \qquad F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{+T} \frac{1 - e^{-itx}}{it}\varphi(t)dt,$$

on a une formule applicable à toutes les lois de probabilité, continues ou non. Donc, dans tous les cas, une loi de probabilité est bien définie par la donnée de sa fonction caractéristique $\varphi(t)$ pour toutes les valeurs réelles de t.

On voit d'ailleurs aisément que $\varphi(0) = 1$; que pour une loi réduite $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi''(0) = -1$, de sorte que $\varphi(t) - 1$ et $\Psi(t) = \log \varphi(t)$, ont pour valeur principale $-\frac{t^2}{2}$. Dans le cas de la loi de GAUSS réduite, $\Psi(t) = -\frac{t^2}{2}$, et pour être sûr qu'une loi tend vers la loi de GAUSS réduite il suffit de montrer que $\Psi(t) + \frac{t^2}{2}$ tend vers zéro, et cela uniformément dans tout intervalle fini.

Considérons maintenant deux lois de probabilité indépendantes, de fonctions caractéristiques

$$(12) \qquad \varphi_1(t) = \sum \alpha_h e^{itx_h}, \qquad \varphi_2(t) = \sum \beta_k e^{ity_k},$$

α_h désignant la probabilité de la valeur x_h pour la première loi, et β_k et y_k définissant de même la seconde loi. La fonction caractéristique de la loi résultante, à laquelle obéit la somme $x + y$, est

$$(13) \qquad \varphi(t) = \sum \alpha_h \beta_k e^{it(x_h + y_k)} = \varphi_1(t)\,\varphi_2(t).$$

Donc, dans la composition de deux lois de probabilité (par addition des variables correspondantes, supposées indépendantes), les fonctions

caractéristiques se multiplient ; leurs logarithmes $\Psi(t)$ s'ajoutent. Ce résultat n'est d'ailleurs pas spécial aux lois discontinues, comme la notation employée pour écrire les formules (12) et (13) pourrait le faire penser.

Considérons alors n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, obéissant à la même loi réduite ; nous poserons

$$\log \varphi(t) = \psi(t) = -\frac{t^2}{2}[1 + \omega(t)], \tag{14}$$

$\varphi(t)$ étant la fonction caractéristique de cette loi ; on a $\omega(0) = 0$. Pour leur somme X, $\Psi(t)$ est remplacé par

$$\Psi(t) = n\psi(t) = -n\frac{t^2}{2}[1 + \omega(t)],$$

et pour la somme réduite $\frac{X}{\sqrt{n}}$, le logarithme de la fonction caractéristique est

$$\Psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{t^2}{2}\left[1 + \omega\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Il tend uniformément vers $-\frac{t^2}{2}$ dans tout intervalle fini, de sorte qu'à la limite $\frac{X}{\sqrt{n}}$ obéit bien à la loi de GAUSS réduite.

Nous venons de traiter le cas où les différents termes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obéissent à la même loi. Il suffirait de quelques lignes de plus pour traiter le cas général. On arrive ainsi à mettre en évidence que la somme réduite $\frac{X}{M}$ obéit à la loi de GAUSS, pourvu que soient vérifiées les trois conditions suivantes, toutes les trois essentielles :

1° Chacune des erreurs x a une valeur quadratique moyenne finie m ; (la valeur probable de x est alors aussi finie et on peut, comme nous l'avons fait, la supposer nulle).

2° Le plus grand des nombres m^2 est très petit par rapport à leur somme M^2 ;

3° Les fonctions $\omega(t)$, liées par la formule (14) aux fonctions caractéristiques $\varphi(t)$ des lois auxquelles obéissent les variables réduites $\xi = \frac{x}{m}$, sont toutes majorées, au moins dans un petit intervalle comprenant la valeur $t = 0$, par une fonction $\Omega(t)$ nulle pout $t = 0$ et continue près de ce point.

Toutes ces conditions reviennent d'ailleurs à limiter le rôle des grandes valeurs des variables x, de sorte que la conclusion que $\frac{X}{M}$ obéit à la loi de Gauss a bien la portée voulue au point de vue de la théorie des erreurs.

Nous n'insisterons pas sur la troisième de ces conditions. La nécessité de la seconde est bien évidente : si l'une des erreurs partielles n'était pas très petite par rapport à l'erreur totale, il ne serait pas possible que la loi à laquelle obéit cette erreur fût sans influence sur l'erreur totale. Si les erreurs considérées sont en nombre infini, et se présentent comme les termes d'une série, il est alors essentiel que la série soit

$$m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2$$

divergente ; autrement chacun des termes serait une fraction appréciable de la somme. En cas de convergence de cette série, même si la série

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n + \cdots$$

est divergente, on ne doit pas s'attendre à trouver la loi de Gauss.

A fortiori ne doit-on pas s'y attendre si les carrés des variables x n'ont pas leurs valeurs probables finies. Dans ces cas les grandes valeurs de ces variables ont des probabilités suffisantes pour influer d'une manière sensible sur la loi de probabilité de leur somme. Des circonstances très diverses sont alors possibles ;il peut arriver notamment qu'on obtienne à la limite une loi stable autre que celle de Gauss ; il existe en effet une double infinité de lois stables.

3. — Conclusions relatives a la compensation des erreurs. — Tels sont les caractères essentiels de la théorie mathématique qui permet de comprendre le rôle de la loi de Gauss dans la théorie des erreurs. Terminons cet exposé par quelques remarques sur les méthodes employées pour la compensation des erreurs accidentelles ; on a beaucoup discuté la question de savoir si ces méthodes pouvaient se justifier indépendamment de la loi de Gauss. Les conclusions de ces discussions sont les suivantes :

1° S'il est vrai que l'erreur accidentelle obéisse à la loi de Gauss, ces méthodes sont les meilleures possibles ; toute autre méthode donnerait une précision moins grande ;

2° Si l'erreur n'obéit pas à la loi de Gauss, mais n'en diffère pas trop ces méthodes conservent une valeur incontestable ; mais on ne peut plus

affirmer qu'elles soient les meilleures possibles. Elles restent bonnes tant que la loi de probabilité de l'erreur comporte une valeur quadratique moyenne, et permettent, au moins en théorie, d'augmenter indéfiniment la précision par la répétition des mesures ;

3° Ces méthodes tombent au contraire complètement en défaut dans le cas des lois comportant une erreur quadratique moyenne infinie. De telles lois ne semblent guère pouvoir se rencontrer dans une bonne méthode de mesure. Mais s'il arrivait qu'une telle loi fût vérifiée, il importe de remarquer que dans ce cas l'on peut se tirer d'affaire par d'autres méthodes. Signalons notamment celle qui consiste à écarter dans des proportions déterminées les plus grandes et les plus petites valeurs trouvées, et à prendre la moyenne des mesures conservées. Cette méthode est applicable dans tous les cas et, même dans le cas où la méthode classique est meilleure, n'est pas beaucoup plus mauvaise qu'elle.

Sur quelques applications des équations intégrales

PAR

V. A. KOSTITZIN

---

1. — Je suis profondément ému par le grand honneur qui m'est fait. Je le suis d'autant plus que le grand nom auquel est consacré ce magnifique institut représente pour moi non seulement un beau chapitre de l'histoire de la science, mais aussi une personnalité vivante : je me souviens parfaitement de Poincaré, de ses mouvements, de ses gestes, de sa voix et de l'impression profonde que produisait sur nous — auditeurs — sa pensée créatrice toujours active et toujours vivante, et de la douleur que nous ressentîmes en apprenant un jour sa fin prématurée.

2. — Je me souviens surtout du sentiment d'inquiétude scientifique dont étaient imprégnés ses derniers cours et les derniers mémoires qu'il publia. La crise actuelle de la science ou plutôt la crise de croissance de la science dont nous sommes tous témoins s'ébauchait déjà de ses jours. Il lui arrivait souvent de tenir des propos profondément sceptiques, parfois même pessimistes, mais il lui arrivait aussi souvent de prévoir le développement ultérieur de la science, et peut-être son scepticisme même provenait-il de ce qu'il comprenait parfaitement la fragilité des théories physiques, voyait clairement tous les coups de pouce nécessaires pour mettre une théorie en concordance avec l'expérience, et se rendait compte qu'on pouvait toujours sauver une théorie par un coup de pouce bien choisi et bien appliqué.

3. — Dans mes conférences je m'occuperai précisément d'un coup de pouce donné à la mécanique et à la physique mathématique sous la forme de la physique héréditaire créée par l'éminent mathématicien qui fit récemment ici-même l'exposé magistral de la biologie mathématique.

La physique héréditaire de M. Volterra est une tentative sinon de résoudre, du moins d'amoindrir les difficultés qui résultent de l'antinomie ancienne entre la physique ordinaire et la physique moléculaire, entre la mécanique des corps bruts et la mécanique statistique. Depuis l'époque de LAPLACE avec son idéal scientifique (qui fut aussi l'idéal scientifique de son temps), avec sa conception hardie d'un vaste esprit capable de déduire le passé et l'avenir de l'univers de son présent, la science a subi beaucoup de changements, et bien de prémisses du raisonnement de LAPLACE se sont volatilisées. Le point matériel a ondoyé. On a perdu l'habitude de se servir de la notion de force sans réfléchir sur sa nature. Les équations différentielles ne sont plus ni la forme unique ni la meilleure forme pour exprimer les phénomènes, de même que les données initiales de la mécanique de LAGRANGE ne sont plus du tout suffisantes pour déduire le passé et l'avenir d'un système ou de l'univers entier. Et la conception mécaniste du commencement du XIX[e] siècle ne nous apparaît actuellement que comme une extrapolation hasardeuse et injustifiée des lois souvent encore douteuses du monde macroscopique dans le monde microscopique.

4. — Dans ces conditions la tentative de totaliser les traces des actions subies par un système, la tentative d'escompter l'histoire du système étudié n'est pas en elle-même plus paradoxale que la totalisation des influences extérieures sur un élément. Ici, comme là, on opère avec des notions d'origine statistique, on fait des hypothèses souvent grossières sur la nature des actions intra-moléculaires, on construit des modèles mécaniques en utilisant pour ce travail délicat des matériaux hétéroclites. Dans les deux cas, en raisonnant on se base sans s'en rendre compte sur des prémisses plutôt intuitives. Il n'y a là-dedans rien qui puisse nous choquer : il est très naturel d'utiliser dans notre raisonnement les éléments immédiats de notre expérience. Progressivement ces images grossières sont remplacées par des notions plus fines, plus élaborées. Des lois plus exactes se dégagent peu peu à des hypothèses approximatives. C'est une évolu-

tion par laquelle la physique moléculaire a déjà passée, et ses succès mêmes permettent à la physique héréditaire d'évoluer plus rapidement.

Serait-ce une méthode transitoire qui s'explique par la faiblesse de notre technique ? Je ne le crois pas. Il ne faut pas oublier que les choses temporaires sont les plus durables. La physique héréditaire n'est pas un stade dans le développement de la science -- c'est une méthode qui fera toujours partie de notre outillage scientifique par suite de la nature même de notre connaissance. Pour étudier un système, nous serons toujours obligés de le séparer du reste de l'univers et de chercher ensuite un équivalent aux actions du reste de l'univers. Nous serons toujours obligés de substituer aux interactions des particules de la matière des moyennes observables et de chercher ensuite l'équivalent des actions négligées. Ces équivalents peuvent se présenter sous une double forme : 1° les forces fictives et les conditions limites introduites dans les équations, 2° l'histoire du système. Certes, c'est un artifice, mais c'est un artifice naturel et inévitable.

5. — En mettant en équations n'importe quel problème de la philosophie naturelle on cherche toujours la forme la plus simple et on choisit presque toujours la forme linéaire, celle de Hooke. Tout en comprenant les raisons de ce choix je veux signaler quand même que pareille simplification va presque toujours à l'encontre des intérêts de la recherche scientifique et que le temps est venu de nous débarrasser peu à peu de cette habitude. On peut en effet citer de nombreux cas où la forme linéaire ne donne pas et ne peut donner même la première approximation, la fonction n'étant pas développable en série de Taylor. On peut citer d'autres cas où l'on perd en première approximation une propriété essentielle du problème comme l'interaction des individus dans la biologie dynamique ou l'interaction des particules dans un grand nombre des problèmes physiques. Il sera sans doute nécessaire dans l'avenir de passer à l'étude des équations non linéaires, et alors à côté des difficultés analytiques on aura des difficultés philosophiques. Pour en donner l'idée je me permets d'indiquer rapidement un exemple intéressant.

Prenons une équation intégrale non linéaire

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, t)F[\varphi(t)]dt,$$

$K(x, t)$ étant pour fixer les idées un noyau bien connu

$$K(x, t) = x(1 - t) \qquad x < t$$
$$K(x, t) = t(1 - x) \qquad x > t$$

et supposons les fonctions $F(\varphi)$ et $f(x)$ développables en série de TAYLOR. Il est très naturel d'arrêter ces développements aux premiers termes. Ecrivons donc

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \lambda \int_0^1 K(x, t)[\varphi(t) + \mu\varphi^3(t)]dt.$$

Cette équation intégrale se résout par des fonctions élliptiques de JACOBI, et pour chaque paire de valeurs λ, μ on a une multiplicité et parfois une infinité de solutions alors que l'équation linéaire correspondante se conduit suivant les règles de FREDHOLM, et d'autre part en choisissant convenablement la fonction $F(\varphi)$ on peut assurer l'unicité de solution de l'équation initiale. Nous allons voir que la multiplicité de solutions se présente aussi pour quelques classes d'équations linéaires, et une question très importante se poserait alors sur le rapport de ces solutions multiples avec la réalité.

6. — Après ces préliminaires nous allons nous occuper d'équations intégrales linéaires de la physique héréditaire. Il en existe trois formes

(1) $$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{t_0}^{x} g(x - t)\varphi(t)dt$$

(2) $$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{x-h}^{x} g(x - t)\varphi(t)dt$$

(3) $$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{x} g(x - t)\varphi(t)dt.$$

Dans le premier cas on suppose que l'histoire commence à l'instant t_0; dans le second cas on suppose que l'action héréditaire appréciable est bornée à un petit intervalle de temps, et dans le troisième cas on considère toute l'histoire du système. Nous allons étudier surtout l'équation (2).

Il faut remarquer tout d'abord que sa forme nous permet de la rapprocher des équations aux différences finies. On peut donc s'attendre à ce qu'elle en ait toutes les particularités et à ce qu'on puisse y appliquer les mêmes procédés de résolution. D'autre part

c'est une équation intégrale linéaire et on y peut appliquer les méthodes servant généralement à leur résolution et tout d'abord la méthode des approximations successives. Nous verrons par la suite que les deux méthodes se complètent mutuellement.

Désignons l'opération

$$\int_{x-h}^{x} g(x-t)\varphi(t)dt$$

par le symbole $G\varphi$ et écrivons l'équation (2) sous la forme

$$\varphi = f + G\varphi.$$

En y appliquant n fois l'opération G on obtient

$$\varphi = f + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k G^k f + \lambda^n G^n \varphi$$

ou, ce qui revient au même

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k \int_{x-hk}^{x} g_k(x-z)f(z)dz + \lambda^n \int_{x-nh}^{x} g_n(x-z)\varphi(z)dz$$

Il est facile de voir que les fonctions $G_n(y)$ sont déterminées par des relations recurrentes

$$g_n(y) = \int_{y-h}^{(n-1)h} g(y-u)g_{n-1}(u)du \qquad (n-1)h \leqslant y \leqslant nh$$

$$g_n(y) = \int_{y-h}^{y} g(y-u)g_{n-1}(u)du \qquad h \leqslant y \leqslant (n-1)h$$

$$g_n(y) = \int_{0}^{y} g(y-u)g_{n-1}(u)du \qquad 0 \leqslant y \leqslant h$$

$g_n(y) = 0$, en dehors de ces limites. Remarquons que chaque nouvelle itération fait reculer la limite inférieure de l'intégration ; donc, si nous voulons obtenir une solution par cette méthode nous devons supposer que l'histoire nous est connue depuis $-\infty$.

Passons rapidement en revue les résultats de l'application de l'opération G aux diverses fonctions élémentaires :

a) $\qquad f(x) = a_0 ; \qquad G^n f(x) = a_0 k_0{}^n,$

en désignant par k_m l'intégrale

$$k_m = \int_0^h g(z) z^m dz$$

b) $$f(x) = x\,; \qquad G^n f(x) = k_0{}^n \cdot \left(x - \frac{nk_1}{k_0}\right)$$

c) $$f(x) = x^2$$

$$G^n f(x) = k_0{}^n \left(x - \frac{nk_1}{k_0}\right)^2 + nk_0{}^{n-2}(k_0 k_2 - k_1{}^2)$$

d) $$f(x) = e^{\alpha x}\,; \qquad G^n f(x) = e^{\alpha x} \gamma^n(\alpha),$$

en désignant par $\gamma(\alpha)$ l'intégrale

$$\gamma(\alpha) = \int_0^h g(z) e^{-\alpha z} dz$$

e) $$f(x) = \int_A^B \psi(t) e^{\alpha x t} dt$$

$$G^n f(x) = \int_A^B \psi(t) e^{\alpha x t} \gamma^n(\alpha t) dt.$$

On déduit facilement des formules précédentes

$$\int_{x-hn}^{x} g_n(x - z) dz = \int_0^{nh} g_n(z) dz = k_0{}^n$$

$$\int_0^{nh} g_n(z) e^{-\alpha z} dz = \gamma^n(\alpha).$$

Écrivons maintenant la formule

$$\varphi = f + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k G^k f + \lambda^{n+1} G^{n+1} \varphi.$$

sous la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{x-nh}^{x} f(z) dz \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} g_k(x - z) + \lambda^{n+1} \int_{x-(n+1)h}^{x} g_{n+1}(x-z) \varphi(z) dz.$$

La série

$$\Gamma(\lambda\,; x - z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} g_k(x - z)$$

vérifie l'équation intégrale

$$\Gamma(\lambda\,;\, x - z) = g(x - z) + \lambda \int_z^x g(x - u)\Gamma(\lambda\,;\, u - z)du\,[o < x - z < h]$$

$$\Gamma(\lambda\,;\, x - z) = \lambda \int_{x-h}^x g(x - u)\Gamma(\lambda\,;\, u - z)du\,[h < x - z < \infty].$$

On voit donc que pour $o < x - z < h$

$$\Gamma(\lambda\,;\, x - z) = R(\lambda\,;\, x - z),$$

en désignant par $R(\lambda\,;\, x - z)$ le noyau résolvant ordinaire de VOLTERRA.

On peut maintenant établir le caractère de convergence de la série

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n G^n f(x).$$

Supposons par exemple que $g(z)$ n'est jamais négatif et que la fonction $f(x)$ est bornée

$$|\, f(x)\,| \leqslant M.$$

On obtient alors la série majorante

$$M + \sum_{n=1}^{\infty} M\,|\,\lambda\,|^n k_0{}^n = \frac{M}{1 - |\,\lambda\,|\,k_0}.$$

On voit que la série est convergente tant que $|\,\lambda\,|\,k_0 < 1$ et diverge dans le cas contraire. La constante $|\,\lambda\,|\,k_0$ joue un rôle important, et nous l'appellerons *mesure d'hérédité.*

Supposons ensuite que $f(x)$ croit comme $e^{\alpha x}$: $f(x) \backsim e^{\alpha x}$; on a en ce cas

$$G^n f(x) \backsim e^{\alpha x}\gamma^n(\alpha),$$

et la série majorante a la forme

$$e^{\alpha x} + \sum |\,\lambda\,|^n e^{\alpha x}\gamma^n(\alpha) = \frac{e^{\alpha x}}{1 - |\,\lambda\,|\,\gamma(\alpha)}.$$

Ces exemples montrent que dans un nombre de cas la série

$$(3) \qquad \varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n G^n f(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^x \Gamma(\lambda\,;\, x - z) f(z)dz$$

peut nous donner une solution de l'équation (2) mais il est très facile de s'assurer que la formule (3) n'en donne pas la solution complète, et qu'il faut examiner l'équation homogène.

Nous avons indiqué l'analogie qui existe entre les équations aux différences finies et l'équation (2). Or, précisément de la même façon qui permet d'obtenir l'équation caractéristique

$$1 - e^{\alpha h} = 0$$

de l'équation fonctionnelle des fonctions périodiques

$$f(x + h) - f(x) = 0$$

et de former le système complet des fonctions trigonométriques, on peut construire l'équation caractéristique

$$1 = \lambda\gamma(\alpha) = \lambda \int_0^h g(z) e^{-\alpha z} dz \tag{4}$$

de l'équation intégrale homogène

$$\varphi(x) = \lambda \int_{x-h}^{x} g(x - t)\varphi(t) dt. \tag{5}$$

L'équation (4) a en général une infinité de solutions α_n ce qui nous permet d'utiliser le système de fonctions

$$e^{\alpha_n x}, \qquad e^{\bar{\alpha}_n x}$$

pour développer sous certaines conditions en série une fonction arbitraire dans l'intervalle de mesure h.

Supposons maintenant que l'on ait

$$\lambda > 0, \qquad g(z) \geq 0.$$

Dans ce cas l'équation (4) a une solution réelle unique α_0. Cette solution est positive si la mesure d'hérédité $\lambda k_0 > 1$ et négative dans le cas contraire. Quant aux solutions complexes, on les trouve en résolvant le système

$$\left\{ \begin{aligned} 1 &= \lambda \int_0^h g(z) e^{-\xi z} \cos \eta z dz \\ 0 &= \lambda \int_0^h g(z) e^{-\xi z} \cos \eta z dz. \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Remarquons que pour $g(z)$ décroissant la partie réelle de $\alpha = \xi + i\eta$ est toujours négative. D'autre part dans ce cas il n'y a jamais de solutions purement imaginaires. Donc si la mesure d'hérédité est inférieure à l'unité la solution de l'équation (2) est toujours stable. Or, à vrai dire, nous n'avons guère de raisons pour supposer dans tous les cas $g(z)$ décroissant, et alors il faut imposer des conditions supplémentaires pour assurer la stabilité de la solution de l'équation (2).

On peut maintenant obtenir une solution complète de l'équation (2)

$$(7) \qquad \varphi(x) = f(x) + \sum \lambda^n G^n f(x) + A_0 e^{\alpha_0 x} + \sum A_n e^{\alpha_n x} + \overline{A}_n e^{\overline{\alpha_n} x}$$

en ajoutant à la série (3) le développement

$$A_0 e^{\alpha_0 x} + \sum A_n e^{\alpha_n x} + \overline{A_n} e^{\overline{\alpha_n} x}.$$

Les coefficients A_n sont soumis à une seule condition — la convergence de la série. On voit également que la fonction $f(x)$ dans ce cas ne peut être choisie arbitrairement, tout comme dans le troisième théorème de FREDHOLM, à cette différence près qu'ici le caractère de croissance de $f(x)$ tient place de la condition d'orthogonalité

$$\int \varphi_k(x) f(x) dx = 0.$$

Supposons en effet que $f(x)$ croisse comme $Ae^{\alpha x}$. Il est facile de voir que le coefficient α doit satisfaire à la condition

$$\gamma(\alpha) < \gamma(\alpha_0)$$

d'où résulte l'inégalité

$$\alpha > \alpha_0.$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, la série (3) diverge.

Nous terminerons ce paragraphe par un exemple. Soit $g(z) = e^{-\lambda z}$. Le système caractéristique prend la forme

$$\xi = -\lambda e^{-(\xi+\lambda)h} \cos \eta h$$
$$\eta = \lambda e^{-(\xi+\lambda)h} \sin \eta h$$

ou

$$(8) \qquad \begin{cases} \xi = -\eta \cot \eta h \\ e^{\xi h} = \lambda e^{-\lambda h} \dfrac{\sin \eta h}{\eta}. \end{cases}$$

Il est facile de voir que les courbes (8) ont un nombre infini de points d'intersections.

7. — Existe-t-il quelque chose d'analogue au premier théorème de FREDHOLM ? Le spectre de l'équation (2) est continu, l'intervalle de l'intégration est infini ; donc, il faut chercher la solution de (2) sous forme d'une intégrale de FOURIER. Supposons donc $f(x)$ représentable sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\alpha(x-\xi)} d\xi.$$

Nous obtenons en itérant

$$G^n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\alpha(x-\xi)} \gamma^n(i\alpha) d\xi$$

ce qui nous permer d'écrire une représentation formelle de $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{1 - \lambda\gamma(i\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\alpha(x-\xi)} d\xi$$

ou

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma(i\alpha) d\alpha}{1 - \lambda\gamma(i\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\alpha(x-\xi)} d\xi.$$

Or justement nous avons vu que pour $g(z)$ décroissant l'équation caractéristique n'a pas de solutions purement imaginaires. Donc le dénominateur $1 - \lambda\gamma(i\alpha)$ ne peut s'annuler que pour $\alpha = 0$; On voit qu'ici aussi la mesure d'hérédité joue un rôle essentiel. Il faut remarquer en outre que pour l'application de l'intégrale de FOURIER il est nécessaire de connaître la fonction $f(x)$ non seulement dans le passé, mais aussi dans l'avenir.

8. — Nous avons donné la solution $\psi(x)$ de l'équation homogène (5) sous forme d'une série. Or, il est possible de lui donner la forme d'une intégrale en supposant $\psi(x)$ connue dans un intervalle de mesure h, par exemple dans l'intervalle $(0, h)$. En désignant par $R(\lambda ; x - u)$ le noyau résolvant ordinaire de VOLTERRA et en supposant $h < x < 2h$ on obtient la solution de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_{h}^{x} g(x-t)\varphi(t)dt + \lambda \int_{x-h}^{h} g(x-t)\psi(t)dt.$$

sous la forme,

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^h H_1(\lambda ; x, z)\psi(z)dz.$$

La fonction H_1 est définie par les relations

$$H_1(\lambda ; x, z) = \lambda \int_h^{h+z} R(\lambda ; x - u)g(u - z)du \qquad (0 < z < x - h)$$

$$H_1(\lambda ; x, z) = g(x - z) + \lambda \int_h^x R(\lambda ; x - u)g(u - z)du \qquad (x - h < z < h).$$

Il est facile de voir qu'on a en général pour $nh < x < (n + 1)h$

$$\varphi(x) = \lambda^n \int_0^h H_n(\lambda ; x_1 z)\psi(z)dz,$$

H_n étant définie par la relation recurrente

$$H_n(\lambda ; x, z) = \int_0^h H_{n-1}(\lambda ; y + (n - 1)h, z)H_1(\lambda ; x - (n - 1)h, y)dy.$$

On peut donc calculer la fonction $\varphi(x)$ de proche en proche. La fonction $\varphi(x)$ ainsi calculée est en général discontinue pour $x = h$; au contraire, la continuité est assurée pour $x = nh$ $(n > 1)$. La possibilité de calculer $\varphi(x)$ en partant de ses valeurs dans l'intervalle $(0, h)$ peut servir de preuve indirecte de la fermeture du système de fonctions $[e^{\alpha_n x}]$.

9. — Il est facile de s'assurer que cette particularité n'est pas spéciale aux équations (2) et qu'on la retrouve dans les équations de FREDHOLM et de VOLTERRA aux limites infinies.

Il est toujours possible en effet de représenter la fonction $g(x)$ sous forme d'une série de fonctions d'HERMITE s'il s'agit d'équation de FREDHOLM, ou d'autres fonctions analogues, s'il s'agit d'équation de VOLTERRA. En arrêtant ces développements à un terme quelconque on peut obtenir une fonction continue suffisamment approchée de $g(x)$. Cette fonction utilisée comme noyau de FREDHOLM ou de VOLTERRA jouira des mêmes propriétés que $g(x)$. Un petit exemple suffira : soit

$$g(x) = e^{-x^2}$$

noyau de l'équation de Fredholm

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-z)^2}\varphi(z)dz.$$

L'équation caractéristique à la forme

$$1 = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2-\alpha z}dz = \lambda\sqrt{\pi}\, e^{\frac{\alpha^2}{4}}.$$

En posant $\alpha = \xi + i\eta$ on obtient

$$e^{\frac{\xi^2-\eta^2}{4}} \cos\frac{\xi\eta}{2} = \frac{1}{\lambda\sqrt{\pi}}$$

$$e^{\frac{\xi^2-\eta^2}{4}} \sin\frac{\xi\eta}{2} = 0.$$

Il en résulte

$$\xi\eta = 2\pi n$$

$$\cos\frac{\xi\eta}{2} = (-1)^n;\ e^{\frac{\xi^2-\eta^2}{4}} = \frac{(-1)^n}{\lambda\sqrt{\pi}}.$$

On voit donc que pour $\lambda < 0$ il faut choisir n impair alors que pour $\lambda > 0$ n doit être pair. Désignons dans les deux cas la quantité positive $\frac{(-1)^n}{\lambda\sqrt{\pi}}$ par e^A. Nous aurons

$$\xi^2 - \eta^2 = 4A$$

$$\xi^4 - 4A\xi^2 - 4\pi^2 n^2 = 0$$

$$\xi^2 = 2A + 2\sqrt{A^2 + \pi^2 n^2}.$$

On trouve donc pour chaque λ un système de fonctions $[e^{\alpha_n x}]$ tout à fait analogue à celles déjà considérées dans le cas de l'équation (5).

10. — Nous avions admis jusqu'à présent l'hypothèse de l'absence du moment initial. Si l'on suppose avoir fait table rase de tout ce qui a précédé un moment donné t_0, on peut obtenir une solution et une solution unique de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{x-h}^{x} g(x-t)\varphi(t)dt \qquad x > h + t_0$$

laquelle pour $t_0 < x < h + t_0$ doit nécessairement prendre la forme d'une équation ordinaire de VOLTERRA

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{t_0}^{x} g(x-t)\varphi(t)dt. \tag{1}$$

Remarquons pourtant qu'on doit être bien sûr que l'histoire commence au moment t_0 ; on peut toujours se demander s'il n'y a pas eu d'influences cachées de l'histoire précédente, d'influences pouvant affecter la solution cherchée. En supposant que tel n'est pas le cas, on trouve

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{t_0}^{x} R(\lambda\,;\,x-u)f(u)du \qquad (t_0 < x < t_0 + h)$$

et on procède ensuite par les prolongements successifs. On a pour $t_0 + h < x < t_0 + 2h$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{t_0+h}^{x} g(x-t)\varphi(t)dt + \lambda \int_{x-h}^{t_0+h} g(x-t)\varphi(t)dt.$$

Or

$$\int_{x-h}^{t_0+h} g(x-t)\varphi(t)dt = \int_{x-h}^{t_0+h} g(x-t)dt[f(t) + \lambda \int_{t_0}^{t} R(\lambda\,;\,t-u)f(u)du]$$
$$= \int_{t_0}^{t_0+h} P_1(\lambda\,;\,x, z)f(z)dz,$$

en désignant par $P_1(\lambda\,;\,x, z)$ la fonction

$$P_1(\lambda\,;\,x, z) = g(x-z) + \lambda \int_{z}^{t_0+h} g(x-t)R(\lambda\,;\,t-z)dt \quad (x-h < z < t_0 + h)$$

$$P_1(\lambda\,;\,x, z) = \lambda \int_{x-h}^{h+t_0} g(x-t)R(\lambda\,;\,t-z)dt \qquad (t_0 < z < x-h).$$

Cela nous donne

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{t_0}^{t_0+h} P_1(\lambda\,;\,x, z)f(z)dz +$$
$$+ \lambda \int_{t_0+h}^{x} R(\lambda\,;\,x-z)dz[f(t) + \lambda \int_{t_0}^{t_0+h} P_1(\lambda;\,t, u)f(u)du].$$

On peut continuer ainsi indéfiniment en obtenant toujours une solution unique.

11. — Voyons maintenant la théorie des équations intégro-différentielles ; commençons notre étude par l'équation linéaire homogène

$$\varphi''(x) + \beta^2\varphi(x) = \lambda G\varphi(x), \tag{9}$$

qui ne diffère de l'équation ordinaire des mouvements harmoniques que par la présence du terme héréditaire. L'équation caractéristique a la forme

$$\alpha^2 + \beta^2 = \lambda\gamma(\alpha) = \lambda \int_0^h g(z)e^{-\alpha z}dz. \tag{10}$$

En supposant $\lambda > 0$, $g(z) > 0$ on voit que $\lambda\gamma(\alpha)$ est une fonction décroissante de $+\infty$ à O ; d'autre part sa croissance pour $\alpha \to -\infty$ est beaucoup plus rapide que celle de $\alpha^2 + \beta^2$. Les courbes

$$y = \alpha^2 + \beta^2 \tag{I}$$
$$y = \lambda\gamma(\alpha) \tag{II}$$

ont toujours un point d'intersection. A mesure que λ diminue ce point se déplace vers la gauche, et pour $\lambda \to 0$ on a $\alpha_0 \to -\infty$. D'autre part α_0 est positif pour $\lambda k_0 > \beta^2$ et négatif dans le cas contraire ; il est nul pour $\lambda k_0 = \beta^2$. Posons ensuite $\alpha = \xi + i\eta$. On trouve

$$\left\{\begin{aligned} \xi^2 - \eta^2 + \beta^2 &= \lambda \int_0^h g(z)e^{-\xi z}\cos \eta z dz \\ 2\xi\eta &= -\lambda \int_0^h g(z)e^{-\xi z}\sin \eta z dz. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

On voit sans peine que pour $g(z)$ décroissant $\xi < 0$ et qu'il n'y a pas de solutions purement imaginaires. Donc, en ce qui concerne les solutions complexes, la stabilité de la solution complète est assurée. Mais le terme $A_0e^{\alpha_0 x}$ peut présenter des difficultés, surtout quand β^2 est petit, car alors la condition d'instabilité

$$\lambda k_0 > \beta^2$$

peut facilement être remplie.

Parmi les solutions de l'équation (10) il y a tout d'abord deux développables en série de puissance λ

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n\lambda^n.$$

On trouve sans peine les valeurs des premiers coefficients γ_n :

$$\gamma_0 = \pm i\beta$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\gamma_0} \int_0^h g(z)e^{-\gamma_0 z}dz$$

$$\gamma_2 = -\frac{\gamma_1^2}{2\gamma_0} - \frac{\gamma_1}{2\gamma_0} \int_0^h zg(z)e^{-\gamma_0 z}dz$$

. . . .

Ces solutions que nous désignons par μ et $\overline{\mu}$ correspondent aux solutions de l'équation caractéristique $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ sans hérédité. Mais il y a d'autres solutions en nombre infini $\alpha_n = \xi_n \pm i\eta_n$ et pouvant servir à former un système complet de fonctions

$$e^{\alpha_0 x}, \quad e^{\alpha_1 x}, \quad e^{\overline{\alpha}_1 x}, \ldots$$

On peut montrer que $\xi_n \to -\infty$ pour $\lambda \to 0$. Ces fonctions peuvent être utilisées pour construire une fonction

$$\psi(z) = A_0 e^{\alpha_0 x} + \sum A_n e^{\alpha_n x} + \overline{A}_n e^{\overline{\alpha}_n x}$$

vérifiant l'équation (9).

12. — La résolution de l'équation avec le second membre

$$(12) \qquad \varphi''(x) + \beta^2\varphi(x) - \lambda G\varphi(x) = f(x)$$

dans le cas où le moment initial t_0 est connu et où l'on fait table rase de l'histoire antérieure ne présente pas de difficultés et n'entraîne pas d'ambiguité. On peut facilement par un procédé dû à M. LALESCO par exemple, transformer l'équation

$$(12\ bis) \quad \varphi''(x) + \beta^2\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{t_0}^{x} g(x-z)\,\varphi(z)dz \quad (t_0 < x < t_0 + h)$$

en équation intégrale ordinaire de VOLTERRA, on peut ensuite prolonger la solution obtenue dans les intervalles suivants. Multiplions en effet l'équation (12 *bis*) par $\sin \frac{\beta(t-x)}{\beta} dx$ et intégrons par rapport à x de t_0 à t ; nous obtenons

$$\varphi(t) = \varphi(t_0)\cos\beta(t-t_0) + \varphi'(t_0)\frac{\sin\beta(t-t_0)}{\beta} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} f(x)\frac{\sin\beta(t-x)}{\beta}dx + \lambda\int_{t_0}^{t}\varphi(u)du\int_{u}^{t}\frac{\sin\beta(t-x)g(x-u)}{\beta}dx.$$

La résolution de cette équation se fait sans difficultés. On écrit ensuite pour l'intervalle suivant $t_0 + h < x < t_0 + 2h$

$$\varphi''(x) + \beta^2\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{t_0+h}^{x} g(x-t)\,\varphi(t)dt + \lambda \int_{x-h}^{t_0+h} g(x-t)\,\varphi(t)dt.$$

On substitue dans la dernière intégrale la solution obtenue pour $t_0 < x < t_0 + h$ et on procède de la même manière que dans l'intervalle précédent. En désignant par $\varphi_n(x)$ la valeur de $\varphi(x)$ dans l'intervalle $t_0 + nh < x < t_0 + (n + 1)h$, on aura à résoudre dans chaque intervalle l'équation de VOLTERRA

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(t_0 + nh) \cos \beta(x - t_0 - nh) +$$
$$+ \varphi'_{n-1}(t_0 + nh) \frac{\sin \beta(x - t_0 - nh)}{\beta} +$$
$$+ \int_{t_0+nh}^{x} \frac{\sin \beta(x-t)}{\beta} [f(t) + \lambda \int_{t-h}^{t_0+nh} g(t-u)\varphi_{n-1}(u)du]dt +$$
$$+ \lambda \int_{t_0+nh}^{x} \varphi_n(u)du \int_{u}^{x} \frac{\sin \beta(x-t) g(t-u)}{\beta}\, dt.$$

On voit que la solution dépendra de deux constantes $\varphi(t_0)$, $\varphi'(t_0)$ et que le problème se résout complètement. Mais il reste toujours un doute sur notre droit de négliger l'histoire antérieure au moment t_0. En effet, pour l'instabilité de la solution deux conditions sont suffisantes :

1° l'existence de traces insignifiantes de l'ancien état du système ;

2° la mesure d'hérédité dépassant β^2, ce qui est bien possible quand β^2 est petit.

On a alors $\alpha_0 > 0$, et le terme séculaire $A_0 e^{\alpha_0 x}$ peut toujours apparaître à côté de la solution régulière de l'équation (12). Or, justement ces conditions sont facilement réalisables. Si l'on étudie par exemple l'hystérésis magnétique on prend soin de faire passer l'échantillon étudié par un chauffage suffisant pour faire disparaître les traces de l'état magnétique antérieur. Et malgré cela peut on être sûr qu'il n'en reste pas de traces insignifiantes ? Est-on sûr que la mesure d'hérédité est toujours suffisamment petite ?

13. — Supposons maintenant qu'on cherche une solution de (12) valable pour tout l'espace et que l'on aie

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\alpha(x-\xi)} d\xi$$

Multiplions l'équation (12) par $e^{iz(u-x)}$ et intégrons par rapport à x de $-\infty$ à $+\infty$. Nous obtiendrons ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(u-x)}\varphi''(x)dx + \beta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(u-x)}\varphi(x)dx -$$
$$-\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(u-x)}dx \int_{x-h}^{x} g(x-t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(u-x)}f(x)dx.$$

Admettons que

$$\varphi'(\pm\infty) = 0, \qquad \varphi(\pm\infty) = 0.$$

On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(u-x)}\varphi''(x)dx = -z^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(u-x)}\varphi(x)dx.$$

D'autre part

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(u-x)}dx \int_{x-h}^{x} g(x-t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt \int_{t}^{t+h} e^{iz(u-x)}g(x-t)dx =$$
$$= \gamma(iz) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{iz(u-t)}dt.$$

On a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{iz(u-t)}dt = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iz(u-t)}dt}{\beta^2 - z^2 - \lambda\gamma(iz)}$$

et on obtient sans peine

$$(13) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\beta^2 - z^2 - \lambda\gamma(iz)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iz(x-t)}dt.$$

Pour avoir la solution complète de (12) il faut joindre à l'expression (13) la solution de l'équation homogène, la solution qui comporte. comme nous l'avons vu une fonction et deux constantes arbitraires Cette solution a pourtant un inconvénient déjà signalé : elle suppose la connaissance de l'avenir alors qu'en réalité c'est sur le passé seul qu'il nous est permis de nous baser.

14. — Pour éviter cet inconvénient multiplions l'équation (12) par $\frac{\sin\beta(u-x)}{\beta}$ et intégrons par rapport à x de $u-h$ à u. On obtient

ainsi l'équation

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(u) = \varphi(u-h)\cos\beta h + \varphi'(u-h)\frac{\sin\beta h}{\beta} + \\ + \int_{u-h}^{u}\frac{\sin\beta(u-x)}{\beta}f(x)dx + \lambda\int_{u-2h}^{u}S(u-z)\varphi(z)dz \end{aligned} \right.$$

en désignant par S la fonction

$$S(u-z) = \int_{u-z-h}^{h}\frac{\sin\beta(u-z-x)}{\beta}g(x)dx \qquad (u-2h < z < u-h)$$

$$S(u-z) = \int_{0}^{u-z}\frac{\sin\beta(u-z-x)}{\beta}g(x)dx \qquad (u-h < z < u).$$

Il paraît au premier abord que pour résoudre l'équation (14) il nous faut connaître la fonction $\varphi(x)$ dans un intervalle de mesure $2h$. Or on voit sans peine qu'il suffit de connaître $\varphi(x)$ dans un intervalle de mesure h. En effet, supposons $h < u < 2h$ et $\varphi(x)$ connu dans l'intervalle $(0, h)$. Transcrivons l'équation (14) sous forme

$$\begin{aligned} \varphi(u) = \varphi(u-h)\cos\beta h + \varphi'(u-h)\frac{\sin\beta h}{\beta} + \\ + \int_{u-h}^{u}\frac{\sin\beta(u-x)}{\beta}f(x)dx + \lambda\int_{h}^{u}S(u-z)\varphi(z)dz + \\ + \lambda\int_{0}^{h}S(u-z)\varphi(z)dz + \int_{u-2h}^{0}S(u-z)\varphi(z)dz. \end{aligned}$$

Or il est très facile de déterminer $\varphi(x)$ pour $-h < x < 0$ quand il est connu dans l'intervalle $(0, h)$. Il suffit de différentier l'équation

$$\varphi''(x) + \beta^2\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_{x-h}^{0}g(x-z)\varphi(z)dz + \lambda\int_{0}^{x}g(x-z)\varphi(z)dz.$$

Si $g^{(k)}(x)$ est la première dérivée ne s'annulant pas pour $x = h$, on obtient après k différentiations une équation intégrale de VOLTERRA et en la résolvant on trouve $\varphi(x)$ pour $-h > x < 0$. Le reste s'effectue sans difficulté. Dans le cas où la différentiation n'est pas possible ou bien $g^{(k)}(h) = 0$ quel que soit k on peut utiliser le procédé du nº 12.

15. — On peut traiter de la même manière les équations intégro-différentielles de n'importe quel ordre. Soit

$$(15) \qquad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_{x-h}^{x} g(x-z) \sum_{k=0}^{n} \beta_k \varphi^{(k)}(z) dz$$

une équation intégro-différentielle aux coefficients constants. En la multipliant par $e^{iy(u-x)}dx$ et en intégrant par rapport à x de $-\infty$ à $+\infty$ on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)} \varphi^{(k)}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)} f(x) dx + \\ + \lambda \sum_{k=0}^{n} \beta_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)} dx \int_{x-h}^{x} g(x-z) \varphi^{(k)}(z) dz.$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)} \varphi^{(k)}(x) dx = (iy)^k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)} \varphi(x) dx$$

en supposant naturellement que

$$\varphi(\pm\infty) = \varphi'(\pm\infty) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(\pm\infty) = 0.$$

De même

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)} dx \int_{x-h}^{x} g(x-z) \varphi^{(k)}(z) dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(k)}(z) dz \int_{z}^{z+h} g(x-z) e^{iy(u-x)} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(k)}(z) e^{iy(u-z)} dz \int_{0}^{h} g(x) e^{-iyx} dx =$$

$$= (iy)^k \gamma(iy) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-z)} \varphi(z) dz.$$

On obtient donc après la substitution et l'inversion

$$(16) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{A(iy) - \lambda\gamma(iy) B(iy)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(x-z)} f(z) dz.$$

en désignant par A(t) et B(t) les polynômes

$$A(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$$

$$B(t) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k t^k.$$

L'équation caractéristique a la forme

$$A(\alpha) = \lambda B(\alpha)\gamma(\alpha).$$

On peut diviser ses solutions en deux groupes : 1° n solutions μ_k tendant pour $\lambda \to 0$ vers les racines de l'équation $A(\alpha) = 0$; 2° solutions α_k tendant vers $-\infty$ pour $\lambda \to 0$. Les premières correspondent aux solutions ordinaires des équations différentielles, les secondes permettent de construire un système complet de fonctions $e^{\alpha_n x}$. Pour avoir la solution complète de (15) il faut donc adjoindre à l'expression (16) une somme de termes complémentaires

$$\sum_{k=1}^{n} B_k e^{\mu_k x} + \sum_{k=0}^{\infty} C_n e^{\alpha_n x} + \overline{C_n} e^{\overline{\alpha_n} x}$$

Je n'insiste pas sur les conditions de validité de ces formules.

16. Ces résultats se prêtent à une généralisation. En effet, il n'y a pas de raisons pour supposer que la fonction d'hérédité est la même pour toutes les dérivées de $\varphi(x)$. Dans les problèmes de magnétisme de fer par exemple on peut lier le terme héréditaire d'hystérésis à la première dérivée de $\varphi(x)$ et le terme héréditaire de trainage à la fonction φ elle-même ; on aura alors l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{x-h}^{x} g(x-z)\varphi(z)dz + \int_{x-l}^{x} k(x-z)\varphi'(z)dz.$$

Il est donc tout à fait naturel d'écrire l'équation intégro-différentielle sous forme

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi^{(k)}(x) = f(x) + \sum_{k=0}^{m} \int_{x-h_k}^{x} g_k(x-z)\varphi^{(k)}(z)dz. \tag{17}$$

En la multipliant par $e^{iy(u-x)}dx$ et en intégrant par rapport à x de $-\infty$ à $+\infty$ nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)}\varphi^{(k)}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)}f(x)dx +$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)}dx\int_{x-h_k}^{x} g_k(x-z)\varphi^{(k)}(z)dz.$$

Nous avons vu déjà que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)}\varphi^{(k)}(x)dx = (iy)^k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)}\varphi(x)dx.$$

D'autre part

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(u-x)}dx\int_{x-h_k}^{x} g_k(x-z)\varphi^{(k)}(z)dz = \gamma_k(iy)\,(iy)^k\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)e^{iy(u-z)}dz$$

en désignant par $\gamma_k(iy)$ la fonction

$$\gamma_k(iy) = \int_{0}^{h_k} g_k(x)e^{-iyx}dx.$$

On obtient donc après substitution et inversion

$$(18)\qquad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{D(iy)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(x-z)}f(z)dz$$

en désignant par $D(iy)$ la fonction

$$D(iy) = A(iy) - \sum_{k=0}^{m}\gamma_k(iy)(iy)^k.$$

Quant à l'équation caractéristique, elle a la forme

$$D(\alpha) = A(\alpha) - \sum_{k=0}^{m}\gamma_k(\alpha)\alpha^k = 0,$$

et sa discussion donnerait des résultats analogues à ceux du numéro précédent.

17. Nous allons ébaucher l'étude des systèmes d'équations intégro-différentielles. Soit

$$(19) \qquad \varphi_i''(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\varphi_k(x) = f_i(x) + \sum_{k=1}^{n} \int_{x-h}^{x} g_{ik}(x-t)\varphi_k(t)dt$$

un système de ce genre. Supposons qu'on puisse résoudre le système homogène correspondant par des fonctions

$$\varphi_i(x) = \sum A_{ij} e^{\mu_j x}$$

Cela nous donne immédiatement

$$A_{ij}\mu_j^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{kj}\gamma_{ik}(\mu_j)$$

en désignant

$$\gamma_{ik}(\mu) = \int_0^h g_{ik}(t)e^{-\mu t}dt.$$

L'élimination de coefficients A_{kj} ; nous donne l'équation caractéristique

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} \mu^2 + \alpha_{11} - \gamma_{11}(\mu), & \alpha_{12} - \gamma_{12}(\mu), \cdots \\ \alpha_{21} - \gamma_{21}(\mu), & \mu^2 + \alpha_{22} - \gamma_{22}(\mu), \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots\cdots, \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

L'étude de cette équation est assez pénible ; on peut pourtant s'attendre à ce qu'il y ait en général deux groupes de solutions : 1° $2n$ solutions correspondant aux solutions ordinaires de l'équation caractéristique dans le cas d'absence d'hérédité ; 2° solutions permettant de construire un système complet de fonctions $e^{\mu_n x}$.

Pour obtenir une solution du système (19) on peut appliquer la méthode de FOURIER. Multiplions (19) par $e^{iz(u-x)}\,dx$ et intégrons par rapport à x de $-\infty$ à ∞. Nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i''(x)e^{iz(u-x)}dx + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(x)e^{iz(u-x)}dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)e^{iz(u-x)}dx + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(u-x)}dx \int_{x-h}^{x} g_{ik}(x-t)\varphi_k(t)dt$$

ou

$$(iz)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(x)e^{iz(u-x)}dx + \sum_{k=1}^{n} [\alpha_{ik} - \gamma_{ik}(iz)] \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(x)e^{iz(u-x)}dx = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)e^{iz(u-x)}dx.$$

Désignons les mineurs du déterminant Δ par le symbole Δ_{pq}. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(x)e^{iz(u-x)}dx = \frac{\sum_{q=1}^{n} \Delta_{kq}(iz) \int_{-\infty}^{+\infty} f_q(x)e^{iz(u-x)}dx}{\Delta(iz)}.$$

Il en résulte

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\Delta(iz)} \sum_{q=1}^{n} \Delta_{kq}(iz) \int_{-\infty}^{+\infty} f_q(t)e^{iz(u-t)}dt.$$

Nous n'insisterons pas sur les conditions de validité de ces formules ainsi que sur la formation des solutions complètes du système (19).

18. — Etudions maintenant le mouvement d'un point matériel dans les conditions héréditaires et en absence de forces. En désignant par $x_k(t)$ les coordonnées du point P et par g_{ik} et l_{ik} les coefficients d'hérédité on peut écrire les équations du mouvement

$$(20) \quad x_i''(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t-h}^{t} g_{ik}(t-u)x_k(u)du + \sum_{k=1}^{n} \int_{t-h}^{t} l_{ik}(t-u)x_k'(u)du$$

et si l'on a $t_0 < t < t_0 + h$ ce système prend la forme

$$(20^{bis}) \quad x_i''(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{t} g_{ik}(t-u)x_k(u)du + \sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{t} l_{ik}(t-u)x'_k(u)du.$$

Imposons une condition supplémentaire : supposons que le mouvement soit rectiligne ; on a par conséquent

$$x_i(t) = x_i(t_0) + \frac{x_i'(t_0)[\varphi(t) - \varphi(t_0)]}{\varphi'(t_0)}.$$

La substitution dans l'équation (20 *bis*) nous donne

$$\frac{x_i'(t_0)\varphi''(t)}{\varphi'(t_0)} = \sum_{k=1}^{n}\left[x_k(t_0) - \frac{x_k'(t_0)\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}\right]\int_{t_0}^{t} g_{ik}(t-u)du +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k'(t_0)}{\varphi'(t_0)}\int_{t_0}^{t}\varphi(u)g_{ik}(t-u)du + \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k'(t_0)}{\varphi'(t_0)}\int_{t_0}^{t}\varphi'(u)l_{ik}(t-u)du.$$

Or les valeurs initiales sont tout à fait arbitraires. On obtient donc

$$(21) \qquad \int_{t_0}^{t} g_{ik}(t-u)du = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$(22) \qquad \int_{t_0}^{t}\varphi(u)g_{ik}(t-u)du + \int_{t_0}^{t}\varphi'(u)l_{ik}(t-u)du = 0 \qquad (i \neq k)$$

$$(23) \qquad \varphi''(t) = \int_{t_0}^{t}\varphi(u)g_{kk}(t-u)du + \int_{t_0}^{t}\varphi'(u)l_{kk}(t-u)du.$$

Il résulte des équations (21) que tous les coefficients d'hérédité g_{ik} sont nuls, et alors les équations (22) montrent que

$$l_{ik} \equiv 0 \qquad (i \neq k).$$

On voit facilement que

$$l_{11} = l_{22} = \cdots = l_{nn} = l,$$

et l'équation (23) prend la forme

$$(24) \qquad \varphi''(t) = \int_{t_0}^{t}\varphi'(u)l(t-u)du \qquad (t_0 < t < t_0 + h).$$

On voit de même que

$$(24^{bis}) \qquad \varphi''(t) = \int_{t-h}^{t}\varphi'(u)l(t-u)du \qquad (t > t_0 + h).$$

L'équation (24) se transforme facilement : on a

$$\varphi(t) = \varphi(t_0)\left[1 - \int_0^{t-t_0}(t-t_0-u)l(u)du\right] + (t-t_0)\varphi'(t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\varphi(u)du \cdot \int_0^{t-u} l(z)dz.$$

Cette équation de VOLTERRA se résout sans difficultés. En désignant par $R(t-z)$ le noyau résolvant de $l(z)$, on a

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0) \left\{ t - t_0 + \int_0^{t-t_0} (t - t_0 - z) R(z) dz \right\}$$

Ces formules montrent que l'on doit prendre la fonction $l(z)$ négative. Soit pour fixer les idées $l(z) = -\lambda e^{-\mu z}$.

En ce cas $R(z) = -e^{-(\lambda+\mu)z}$.

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0) \left\{ \frac{\mu(t-t_0)}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda[1 - e^{-(\lambda+\mu)(t-t_0)}]}{(\lambda+\mu)^2} \right\}$$

et si l'on admet que l'action héréditaire n'est pas bornée on voit que le mouvement va en ralentissant et que la vitesse se tend asymptotiquement vers la limite $\varphi'(t_0) \frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

On arrive facilement aux mêmes conclusions dans le cas général.

L'équation caractéristique de (24bis)

$$\alpha^2 = \alpha \int_0^h l(u) e^{-\alpha u} du$$

a une racine $\alpha = 0$, une racine négative et une infinité de racines complexes. Les parties réelles de ces racines sont négatives si l'on a

$$l(u) < 0$$

$$-\int_0^h l(u) du < 1.$$

19. — En terminant cette étude je veux revenir sur la question de l'infinité de solutions et leurs rapports avec la réalité. On est parfois tenté de dire que le problème réel ne peut avoir qu'une seule solution et que si le travestissement mathématique d'un problème physique en donne plusieurs c'est que ce travestissement a été mal choisi. On ne peut nier l'exactitude de cette réflexion dans certains cas mais il ne faut pourtant pas oublier les paroles de HEGEL : « tout ce qui est réel est raisonnable, et tout ce qui est raisonnable est réel ». Les conceptions de notre esprit ne sont pas des êtres imaginaires : elles ont parfois plus de réalité que maintes choses réelles. Notre appareil analytique, ainsi que toute la science, est le produit supérieur de l'évo-

lution biologique et de la vie sociale de l'humanité ; il est mieux adapté et plus intimement lié à la réalité des choses et aux besoins de notre conquête de la nature que l'on ne le croit ordinairement. Et s'il nous fournit quelque chose en plus de ce qu'on lui demande, il faut toujours attentivement chercher une réalité correspondante à ce surplus, une réalité qu'on trouve toujours à force de recherches et d'interprétations. Et nous avons toutes les raisons de croire que l'infinité de solutions n'est pas un défaut de ces équations mais plutôt une aubaine. Les expressions du genre

$$\int_{x-h}^{x} g(x-t)\varphi(t)dt, \qquad \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} g(x-t)\varphi(t)dt$$

se rencontrent dans plusieurs problèmes de la philosophie naturelle. On les trouve par exemple dans les problèmes apparemment techniques de la théorie des erreurs, d'interpolation, de la théorie des appareils enregistreurs, de la théorie de recherche de périodes, en un mot partout où il faut dégager les faits essentiels ou les lois empiriques des ensembles statistiques. Un fait observé est toujours une moyenne, en tout cas un résultat des opérations statistiques que l'on effectue parfois consciemment, mais dans la plupart de cas sans comprendre leur nature statistique. Or, la même moyenne observable peut correspondre à une infinité des distributions de faits. N'oublions pas d'autre part que les équations intégrales aux limites infinies sont très employées dans la mécanique statistique pour la recherche des fonctions de distribution, et dans la mécanique ondulatoire. Or précisément dans le premier genre de problèmes la multiplicité de solutions peut correspondre à la multiplicité de lois de distribution possibles. Remarquons que l'étude des fluides montra toute l'importance de la turbulence, mais l'introduction de la turbulence dans les équations de l'hydrodynamique est encore une opération statistique nécessitant l'usage des intégrales $\bar{u} = \frac{1}{h}\int_{t-\frac{h}{2}}^{t+\frac{h}{2}} udt$, etc. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce qu'une équation intégrale ait une infinité de solutions. La fonction arbitraire qui entre dans la composition de la solution complète est selon moi une circonstance favorable correspondant à la réalité des choses et nous permettant une certaine liberté de

mouvements. C'est peut être un défaut au point de vue des axiomatistes extrêmes ; la conception statistique de la nature comporte heureusement toujours de l'imprévu et de l'imprévoyable pour une machine logique si perfectionnée qu'elle soit. On peut bien axiomatiser une théorie physique mais les axiomes utilisés ne seront que des postulats ou des conventions et encore faut-il toujours introduire, en les établissant, des postulats cachés comme on introduit sans nombre en établissant par exemple l'équation de BOLTZMANN. On peut construire un appareil logique mais ce sera un appareil d'usage très limité. Je ne veux pas dire par cela que les machines logiques ne soient pas utiles ; je veux dire seulement que dans la conquête et l'étude de la nature il y aura toujours place à l'activité créatrice humaine.

Imprimerie des PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE, Paris-Saint-Amand. — 26-8-1930.

PRIX DU FASCICULE : **35** *francs*
Abonnement, un volume de quatre fascicules : **120** *francs*